Transf. ryhmät
Harj. 11
Ratkaisuja.

1. • hyvin määr.: Toiminta määr. siis $\tilde{\varphi}(g',[g,x]) = \pi\Phi(g',(g,x))$ $(\pi, \Phi$ kuten alla$)$.
Jos $[g,x] = [\bar{g},\bar{x}]$, niin $\exists\, h\in H$ s.e. $(gh^{-1},hx) = (\bar{g},\bar{x})$ ja
$\tilde{\varphi}(g',[\bar{g},\bar{x}]) = \pi\Phi(g',(\bar{g},\bar{x})) = \pi\Phi(g',(gh^{-1},hx))$
$= \pi(g'gh^{-1},hx) = [g'gh^{-1},hx] = [g'g,x] = \tilde{\varphi}(g',[g,x])$ ok.

• jatkuva:

$$\begin{tikzcd} G\times(G\times \underline{X}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\pi"'] & G\times \underline{X} \arrow[d, "\pi"] \\ G\times(G\times_H \underline{X}) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & G\times_H \underline{X} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g',(g,x)) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g'g,x) \arrow[d, mapsto] \\ (g',[g,x]) \arrow[r, mapsto] & [g'g,x] \end{tikzcd}$$

$(\mathrm{id}\times\pi)$, Φ ja π jatkuvia, $\mathrm{id}\times\pi$ tekijäkuvaus (koska π avoin kuvaus), joten $\tilde{\varphi}$ on jatkuva.

• toiminta:
- $e[g,x] = [eg,x] = [g,x]$ ok.
- $(g_1g_2)[g,x] = [(g_1g_2)g,x] = [g_1(g_2g),x]$
$= g_1\cdot[g_2g,x] = g_1\cdot(g_2\cdot[g,x])$ ok.

$\square$

2. • hyvin määr.: Funktio p määritellään $p([g,x]) = q\circ pr(g,x)$ $(q, pr$ kuten alla$)$.
Jos $[g,x] = [g',x']$, niin $\exists\, h\in H$ s.e. $(gh^{-1},hx) = (g',x')$,
jolloin $p[g',x'] = q\circ pr(gh^{-1},hx) = (gh^{-1})H = g(h^{-1}H) = gH = p[g,x]$.

• jatkuva:

$$\begin{tikzcd} G\times \underline{X} \arrow[r, "pr"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "q"] \\ G\times_H \underline{X} \arrow[r, "p"] & G/H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g \arrow[d, mapsto] \\ {[g,x]} \arrow[r, mapsto] & gH \end{tikzcd}$$

π tekijäkuv. $\Rightarrow$ p jatkuva.

$\square$

3. $f: G\times_K(K\times_H \underline{X}) \to G\times_H \underline{X}$
$[g,[k,x]] \longmapsto [gk,x]$

• hyvin määr.:
$[g,[k,x]] = [g',[k',x']] \Leftrightarrow \exists\, \bar{k}\in K$ s.e. $(g\bar{k}^{-1}, \overbrace{\bar{k}[k,x]}^{=[\bar{k}k,x]}) = (g',[k',x'])$
$\Leftrightarrow \exists\, \bar{k}\in K, \bar{h}\in H$ s.e. $(g\bar{k}^{-1}, \bar{k}k\bar{h}^{-1}, \bar{h}x) = (g',k',x')$.

Siis

$$f([g',[k',x']]) = \pi\circ\varphi(g\bar{k}^{-1}, (\bar{k}k\bar{h}^{-1}, \bar{h}x)) \qquad (\pi, \varphi \text{ kuten alla})$$

$$= \pi(g\underbrace{\bar{k}^{-1}\bar{k}}_{=e}k\bar{h}^{-1}, \bar{h}x) = [gk\bar{h}^{-1}, \bar{h}x] = [gk, x] = f([g,[k,x]]).$$

- f jatkuva:

$$\begin{tikzcd}
G\times K\times X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "id\times\pi_1"'] & G\times X \arrow[dd, "\pi"] & (g,k,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (gk,x) \arrow[dd, mapsto] \\
G\times(K\times_H X) \arrow[d, "\pi_2"'] & & (g,[k,x]) \arrow[d, mapsto] & \\
G\times_K(K\times_H X) \arrow[r, "f"] & G\times_H X & [g,[k,x]] \arrow[r, mapsto] & [gk,x]
\end{tikzcd}$$

$\pi_2\circ(id\times\pi_1)$ tekijäkuvaus $\Rightarrow$ f jatkuva.

- f G-ekviv.:

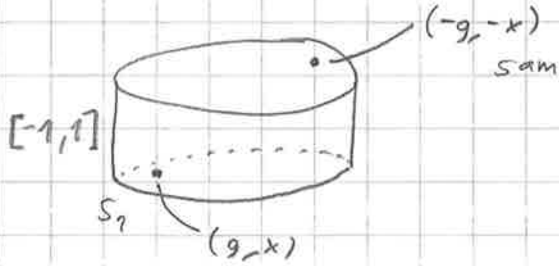
$$f(\bar{g}[g,[k,x]]) = f([\bar{g}g,[k,x]]) = [\bar{g}gk, x]$$

$$= \bar{g}[gk,x] = \bar{g}f([g,[k,x]]).$$

$\square$

4.

$G\times X$:



samastukset
$(g,x)\sim(-g,-x)$

$G\times_H X \approx$ Möbiuksen nauha.

Jos taas H:n toiminta on triviaali, ovat samastukset $(g,x)\sim(-g,x)$ ja $G\times_H X \approx$ lieriö $S^1\times[-1,1]$.

5. a) Määr. $f: G\times_G X \to X$ kaavalla $f([g,x]) = \overset{\overset{gx}{\shortparallel}}{\Phi(g,x)}$

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[dr, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \\ G\times_G X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

- f hyvin määr.:

  Jos $[g',x'] = [g,x]$, on siis $(g',x') = (g\bar{g}^{-1}, \bar{g}x)$ jollakin $\bar{g}\in G$ ja

$$f([g',x']) = \Phi(g',x') = \Phi(g\bar{g}^{-1}, \bar{g}x) = g\bar{g}^{-1}\bar{g}x = gx = \Phi(g,x) = f([g,x]).$$

- f jatkuva, koska π tekijäkuvaus ja Φ jatkuva.

Määr. sitten $\bar{f}: X \to G\times_G X$, $x \mapsto [e,x]$; $\bar{f}$ jatkuva, koska se on yhdiste $X \to G\times X \to G\times_G X$

$$x \mapsto (e,x) \mapsto [e,x].$$

Nyt $\bar{f}\circ f([g,x]) = \bar{f}(gx) = [e,gx] = [g,x]$

ja $f\circ\bar{f}(x) = f[e,x] = ex = x$,

joten $\bar{f}$ ja f ovat toistensa käänt. kuvauksia ja siis homeomorfismeja.

- f on G-ekviv.: $f(\bar{g}[g,x]) = f([\bar{g}g,x]) = (\bar{g}g)x$

$$= \bar{g}(gx) = \bar{g}f([g,x]).$$

$\square$

b) Määr. $f: G\times_H X \to \overbrace{(G/H)\times X}^{G\text{:n toiminta: } \bar{g}(gH,x) = (\bar{g}gH,x)}$

$$[g,x] \longmapsto (gH,x).$$

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \\ G\times_H X \arrow[r, "f"'] & G/H\times X \end{tikzcd} \qquad (g,x) \longmapsto (gH,x)$$

- f hyvin määr.:

  Jos $[g',x'] = [g,x]$, on siis $(g',x') = (gh^{-1}, hx)$ jollakin $h\in H$ ja

$$f([g',x']) = \varphi(g',x') = \varphi(gh^{-1}, \underbrace{hx}_{=x}) = (gh^{-1}H, x) = (gH,x) = \varphi(g,x) = f([g,x]).$$

- f jatkuva, koska π tekijäkuvaus ja φ jatkuva

Määr. sitten $\bar{f}: (G/H)\times X \longrightarrow G\times_H X$

$$(gH,x) \longmapsto [g,x]$$

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[dr, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \\ G/H\times X \arrow[r, "\bar{f}"'] & G\times_H X \end{tikzcd}$$

- $\bar{f}$ hyvin määr.:

  Jos $(g'H,x') = (gH,x)$, niin $x'=x$ ja $\exists h\in H$ s.e. $g'=gh$, jolloin $\bar{f}(g'H,x') = \pi(g',x') = \pi(gh,x) = [gh,x]$

$$= [g,\underbrace{hx}_{=x}] = [g,x] = \bar{f}(gH,x).$$

- $\bar{f}$ jatkuva, koska π jatkuva ja φ tekijäkuvaus (avoin kid)

Selvästi f ja $\bar{f}$ toistensa käänt. kuvauksia.

- f G-ekviv.:

$$f(\bar{g}[g,x]) = f([\bar{g}g,x]) = (\bar{g}gH,x) = \bar{g}(gH,x)$$

$$= \bar{g}f([g,x]).$$

$\square$

6. Olk. $\underline{X} = \{x_0\}$, triviaali toiminta.

Nyt

$$G\times_K (K/H) \approx_G G\times_K ((K/H)\times \underline{X}) \xrightarrow[\approx_G]{5b)} G\times_K (K\times_H \underline{X}) \overset{3.}{\approx_G} G\times_H \underline{X} \overset{5b)}{\approx_G} G/H \times \underline{X} \xrightarrow{\approx_G} G/H$$

$$[g, kH] \longmapsto [g, (kH, x_0)] \longmapsto [g, [k, x_0]] \longmapsto [gk, x_0] \longmapsto (gkH, x_0) \mapsto gkH,$$

mikä todistaa väitteen.

$\square$