Transformaatioryhmät
Harj. 10 (24.11.2016)

1. (kts. luennot s. 73)
Osoita, että $G\ell(V^n)$ on topologinen ryhmä.
Topologian määrittelyssä käytettiin V^n:n kantaa $\mathcal{V}$. Osoita, että $G\ell(V^n)$:n topologia on riippumaton kannan valinnasta (t.s. saadaan sama topologia, vaikka käytettäisiin eri kantaa).

2. (kts. luennot s. 75)
Osoita: Jos $\varphi : G \to G\ell(n, \mathbb{R})$ on lin. esitys, niin void. määritellä G:n jatkuva toiminta $\mathbb{R}^n$:ssä kaavalla $(g, \bar{x}) \mapsto \varphi(g)\bar{x}$.

3. a) (kts. luennot s. 77) Osoita, että funktio $f : (g, \bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y})$ on jatkuva.

b) (kts. luennot s. 82) Osoita, että funktio $f : (g, x) \mapsto \Phi(g^{-1})(\alpha'(gx))$ on jatkuva.

4. Pidetään tunnettuna Tietzen jatkolause (Väisälä: Topologia II, s. 146).
Osoita Tietzen jatkolause, jossa suljetun välin $[a, b]$ tilalla on
a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}^n$.

5. (kts. luennot s. 80)
Osoita, että $\Phi' : G \to G\ell(W)$ on jatkuva.

6. Olkoot $\varphi_1, \varphi_2 : G \to G\ell(n, \mathbb{R})$ G:n lineaarisia esityksiä, ja $\mathbb{R}^n(\varphi_1)$, $\mathbb{R}^n(\varphi_2)$ vastaavat G:n lineaariset esitysavaruudet.
Osoita, että esitykset φ_1, φ_2 ovat ekvivalentit
$\Leftrightarrow$ on olemassa G-ekvivariantti lineaarinen isomorfismi $\mathbb{R}^n(\varphi_1) \to \mathbb{R}^n(\varphi_2)$.

7. Osoita, että pisteen $[g, x] \in G \times_H X$ isotropiaryhmä on $gH_x g^{-1}$.