Transf. ryhmät
Harj. 10
Ratkaisuja.

1. • $Gl(V^n)$ on T_1, koska $Gl(n,\mathbb{R})$ on, ja $Gl(V^n) \approx Gl(n,\mathbb{R})$

• $\mu : Gl(V^n) \times Gl(V^n) \xrightarrow[\eta_{\mathcal{V}} \times \eta_{\mathcal{V}}]{\approx} Gl(n,\mathbb{R}) \times Gl(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R}) \xrightarrow[\eta_{\mathcal{V}}^{-1}]{\approx} Gl(V^n)$.

$Gl(n,\mathbb{R})$:n laskutoim., joka on jatkuva

$$\mu : (B,A) \longmapsto (\eta_{\mathcal{V}}(B), \eta_{\mathcal{V}}(A)) \longmapsto \eta_{\mathcal{V}}(B)\cdot\eta_{\mathcal{V}}(A) \underset{\uparrow}{=} \eta_{\mathcal{V}}(B \circ A) \longmapsto B \circ A.$$

$\eta_{\mathcal{V}}$ homomorfismi

Siis μ on jatkuva.

• $\iota : Gl(V^n) \xrightarrow[\eta_{\mathcal{V}}]{\approx} Gl(n,\mathbb{R}) \xrightarrow[\text{jatkuva}]{\iota'} Gl(n,\mathbb{R}) \xrightarrow[\eta_{\mathcal{V}}^{-1}]{\approx} Gl(V^n)$.

$$\iota : A \longmapsto \eta_{\mathcal{V}}(A) \longmapsto (\eta_{\mathcal{V}}(A))^{-1} \underset{\uparrow}{=} \eta_{\mathcal{V}}(A^{-1}) \longmapsto A^{-1}$$

$\eta_{\mathcal{V}}$ homomorfismi

Siis ι on jatkuva.

$\therefore$ $Gl(V^n)$ on top. ryhmä.

(Yllä olevan voisi kirjoittaa yleisemmällä tasolla seuraavasti:
Ol. G on topologinen ryhmä, H on ryhmä ja $\eta : G \to H$ on ryhmien välinen isomorfismi. Jos ryhmälle H annetaan topologia η:n välityksellä, niin H:sta tulee top. ryhmä).

Annetaan $Gl(V^n)$:lle toinen topologia kuvauksen $\eta_{\mathcal{V}'}$ avulla, missä $\mathcal{V}'$ on toinen V^n:n kanta. Jos merk. τ = topologia $\eta_{\mathcal{V}}$:n avulla ja τ' = topologia $\eta_{\mathcal{V}'}$:n avulla, on siis osoitettava, että

$$id : (Gl(V^n), \tau) \to (Gl(V^n), \tau')$$

on homeomorfismi.

Merkitään $f : Gl(n,\mathbb{R}) \to Gl(n,\mathbb{R})$

$$A \longmapsto [\mathcal{V}'|\mathcal{V}]\, A\, [\mathcal{V}|\mathcal{V}']$$

joka on homeomorfismi käänt. kuvauksena $A \mapsto [\mathcal{V}|\mathcal{V}']\, A\, [\mathcal{V}'|\mathcal{V}]$.

Nyt

$$\eta_{\mathcal{V}'} = f \circ \eta_{\mathcal{V}} : Gl(V^n) \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \longmapsto [\mathcal{V}'|\mathcal{V}]\,[A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}}\,[\mathcal{V}|\mathcal{V}'] = [A]_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}$$

Siis kaavio

$$\begin{tikzcd}
(Gl(V^n), \tau) \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{V}}"', "\approx"] & (Gl(V^n), \tau') \arrow[d, "\approx"', "\eta_{\mathcal{V}'}"] \\
Gl(n,\mathbb{R}) \arrow[r, "f", "\approx"'] & Gl(n,\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

Koska $\eta_{M_{\varphi}}$, $\eta_{M_{\varphi'}}$ ja f ovat homeomorfismeja, niin myös id on $\left(id = \eta_{M_{\varphi'}}^{-1} \circ f \circ \eta_{M_{\varphi}} \right)$.

$\square$

2. $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$(g, \bar{x}) \mapsto \varphi(g) \cdot \bar{x}$

Φ jatkuva:
$$\begin{array}{ccccc} G \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi \times id} & Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{matr.-tulo}} & \mathbb{R}^n \\ (g, \bar{x}) & \longmapsto & (\varphi(g), \bar{x}) & \longmapsto & \varphi(g) \cdot \bar{x} \end{array}.$$

$\varphi \times id$ ja matriisien tulo jatkuvia $\Rightarrow$ Φ jatkuva.

Toiminnan ehdot:

Koska φ on homomorfismi, on $\varphi(e) = I_n$ = ykkösmatriisi.
Siis $\Phi(e, \bar{x}) = \varphi(e) \cdot \bar{x} = I_n \cdot \bar{x} = \bar{x} \quad \forall \bar{x}$
Lisäksi
$$\begin{aligned} \Phi(g_1 g_2, \bar{x}) = \varphi(g_1 g_2) \cdot \bar{x} &\overset{\varphi \text{ homomorfismi}}{=} (\varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)) \cdot \bar{x} \\ &= \varphi(g_1) \cdot (\varphi(g_2) \cdot \bar{x}) \\ &= \varphi(g_1) \cdot \Phi(g_2, \bar{x}) \\ &= \Phi(g_1, \Phi(g_2, \bar{x})) \quad \text{ok.} \end{aligned}$$

$\square$

3. Osoitetaan ensin, että $\vartheta : Gl(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$(A, \bar{x}) \mapsto A(\bar{x})$
on jatkuva: $\vartheta = \mu \circ (\eta_e \times id) : Gl(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
missä η_e on homeomorfismi ja matriisinkertolasku μ on jatkuva.
Siis ϑ on jatkuva.

a) Funktio voidaan esittää yhdistettynä funktiona

$$\begin{array}{ccccc} G \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & G \times \mathbb{R}^n \times G \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Phi \times id \times \Phi \times id} & Gl(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times Gl(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \\ (g, \bar{x}, \bar{y}) & \longmapsto & (g, \bar{x}, g, \bar{y}) & \longmapsto & (\Phi(g), \bar{x}, \Phi(g), \bar{y}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{\vartheta \times \vartheta} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{pistetulo}} & \mathbb{R} \\ & \longmapsto & (\Phi(g)\bar{x}, \Phi(g)\bar{y}) & \longmapsto & (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y}) \end{array},$$

jossa kaikki funktiot ovat jatkuvia. Siis f on jatkuva.

b) f voidaan esittää yhdisteenä

$$
\begin{array}{ccccccccc}
G \times \mathbb{X} & \to & G \times G \times \mathbb{X} & \longrightarrow & G \times \mathbb{X} & \longrightarrow & Gl(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{R}^n \\
(g, x) & \longmapsto & (g^{-1}, g, x) & \longmapsto & (g^{-1}, gx) & \longmapsto & (\Phi(g^{-1}), \alpha'(gx)) & \longmapsto & \Phi(g^{-1})\alpha'(gx),
\end{array}
$$

toiminta $\mathbb{X}$:ssä

joten f on jatkuva.

4. a) Os. ensin tapaus $Y =]-1,1[$:

Olk. $\mathbb{X}$ T_4, $A \subset \mathbb{X}$ ja $f: A \to]-1,1[$ jatkuva.

Ajatellaan $f: A \to [-1,1]$, jolloin Tietzen jatkolause antaa jatkeen $g_1: \mathbb{X} \to [-1,1]$, $g_1|A = f$.

Tark. sitten joukkoa $U = g_1^{-1}(]-1,1[) \subset \mathbb{X}$. Tämä joukko sisältää A:n, joten A ja $\mathbb{X} \setminus U$ ovat erilliset suljetut joukot. Urysohnin lemma [Väisälä, s. 140] antaa jatkuvan funktion $h: \mathbb{X} \to [0,1]$ s.e. $h|A \equiv 1$ ja $h|\mathbb{X}\setminus U \equiv 0$.

Määr. nyt $g: \mathbb{X} \to [-1,1]$

$$g(x) = g_1(x)\, h(x).$$

Jos $x \in U$, on $g(x) = \underbrace{g_1(x)}_{\in]-1,1[} \cdot \underbrace{h(x)}_{\in [0,1]} \in]-1,1[$;

jos taas $x \notin U$, on $g(x) = g_1(x) \cdot 0 = 0$.

Siis $g(\mathbb{X}) \subset]-1,1[$, joten voidaan ajatella $g: \mathbb{X} \to]-1,1[$.

Jos $a \in A$, on $g(a) = g_1(a) \cdot h(a) = f(a) \cdot 1 = f(a)$.

Siis g on haluttu f:n jatke.

Sitten tapaus $Y = \mathbb{R}$:

Olk. $\varphi: \mathbb{R} \to]-1,1[$ homeomorfismi.

Olk. $\mathbb{X}$ T_4, $A \subset \mathbb{X}$ ja $f: A \to \mathbb{R}$ jatkuva.

Nyt $\varphi \circ f: A \to]-1,1[$, joten edellisen nojalla tälle on jatke $g_1: \mathbb{X} \to]-1,1[$. Siis $g_1|A = \varphi \circ f$.

Määr. nyt $g = \varphi^{-1} \circ g_1 : \mathbb{X} \to]-1,1[\to \mathbb{R}$.

g on jatkuva ja jos $a \in A$, niin

$$g(a) = \varphi^{-1}(\underbrace{g_1(a)}_{=(\varphi \circ f)(a)}) = \varphi^{-1}\varphi f(a) = f(a).$$

Siis g on f:n jatke.

$\square$

b) Olk. X T_4, $A \subset X$ ja $f: A \to \mathbb{R}^n$ jatkuva.
Tark. komponenttifunktioita $f_i = pr_i \circ f : A \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
eli $f = (f_1, \ldots, f_n)$.
Edellisen kohdan nojalla jokaiselle f_i:lle löytyy jatke $g_i : X \to \mathbb{R}$,
ja nyt $g = (g_1, \ldots, g_n)$ on haluttu f:n jatke:
Jos $a \in A$, on

$$g(a) = (g_1(a), \ldots, g_n(a)) = (f_1(a), \ldots, f_n(a)) = f(a).$$

g jatkuva, ok.

$\square$

5. ol. V G:n lin. esitysavaruus, $\Phi : G \to Gl(V)$ jatkuva homomorfismi.
W V:n G-invariantti lin. aliavaruus, jolloin $\Phi(g)|: W \to W$
on lin. isomorfismi, jolloin saad.

$$\Phi' : G \to Gl(W), \quad \Phi'(g) = \Phi(g)|_W.$$

v. Φ' on jatkuva

tod. Olkoon $\mathcal{W} = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m\}$ W:n kanta. Laajennetaan se
V:n kannaksi $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m, \bar{v}_{m+1}, \ldots, \bar{v}_n\}$, missä
$\bar{v}_1 = \bar{w}_1, \ldots, \bar{v}_m = \bar{w}_m$, kts. [Honkasalo: Linalg., Seuraus 2.5.11, s. 51].
Olk. $M_{\mathcal{V}} : Gl(V) \xrightarrow{\approx} Gl(n, \mathbb{R})$ ja $M'_{\mathcal{W}} : Gl(W) \xrightarrow{\approx} Gl(m, \mathbb{R})$
homeomorfismit.
Jos nyt $g \in G$, niin $M_{\mathcal{V}}(\Phi(g)) \in Gl(n, \mathbb{R})$ ja
matriisi $M_{\mathcal{V}}(\Phi(g))$ on muotoa

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} A \\ 0 \end{matrix}}_{m} & \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \end{array}\right)}_{n}$$

missä matriisi A vastaa toimintaa aliavaruudessa W, koska
$\mathcal{V}$:n m ensimmäistä vektoria ovat W:n kanta $\mathcal{W}$.
Määr. projektio $p : Gl(n, \mathbb{R}) \to M(m, \mathbb{R})$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}}_{m} & \begin{matrix} B \\ D \end{matrix} \end{array}\right) \longmapsto A$$

jolloin $\Phi'(g) = (M'_{\mathcal{W}})^{-1} \circ p \circ M_{\mathcal{V}}(\Phi(g))$.
Siis

$$\Phi' : G \xrightarrow{\Phi} Gl(V) \xrightarrow{M_{\mathcal{V}}} M_{\mathcal{V}}(Gl(V)) \xrightarrow{p} Gl(m, \mathbb{R}) \xrightarrow{(M'_{\mathcal{W}})^{-1}} Gl(W)$$

$$M_{\mathcal{V}}(Gl(V)) \subset Gl(n, \mathbb{R}), \qquad (*)$$

on jatkuva.

$\square$

(*) Huom. koska matriisit A liittyvät
lin. isomorfismeihin $W \to W$, ne ovat
kääntyviä, eli $A \in Gl(m, \mathbb{R})$.

$$\overbrace{A\varphi_1(g)A^{-1}}^{\text{eli } A\varphi_1(g) = \varphi_2(g) A} = \varphi_2(g) \quad \forall g \in G.$$

6. "$\Leftarrow$" olkoon $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$ s.e. $A\varphi_1(g)A^{-1} = \varphi_2(g)$ $\forall g \in G$.

Määr. $f: \mathbb{R}^n(\varphi_1) \to \mathbb{R}^n(\varphi_2)$

$\bar{x} \longmapsto A\bar{x}$;

f on lin. isomorfismi, koska $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$.

Riittää siis osoittaa, että f on G-ekvivariantti:

$$f(g\bar{x}) = f(\varphi_1(g)\cdot\bar{x}) = A\cdot\varphi_1(g)\cdot\bar{x} = \varphi_2(g)\cdot A\cdot\bar{x}$$
$$= \varphi_2(g)\cdot f(\bar{x}) = g f(\bar{x}).$$

"$\Rightarrow$" Olk. $f: \mathbb{R}^n(\varphi_1) \to \mathbb{R}^n(\varphi_2)$ G-ekviv. lin. isomorfismi ja A = f:n matriisi tavall. kannan suhteen, eli siis $f(\bar{x}) = A\cdot\bar{x}$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n(\varphi_1)$. G-ekvivarianttisuus tarkoittaa $A\cdot\varphi_1(g)\cdot\bar{x} = \varphi_2(g)\cdot A\cdot\bar{x}$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n(\varphi_1)$, $g \in G$.

Tästä seuraa $A\cdot\varphi_1(g) = \varphi_2(g)\cdot A$ $\forall g \in G$

eli $\varphi_2(g) = A\varphi_1(g)A^{-1}$ $\forall g \in G$

eli φ_1, φ_2 ovat ekvivalentit.

$\square$

7.
$$\bar{g}[g,x] = [g,x]$$
$$\Leftrightarrow [\bar{g}g,x] = [g,x]$$
$$\Leftrightarrow \exists h \in H \text{ s.e. } \bar{g}gh^{-1} = g \text{ ja } hx = x$$
$$\Leftrightarrow \exists h \in H_x \text{ s.e. } \bar{g}gh^{-1} = g$$
$$\Leftrightarrow \exists h \in H_x \text{ s.e. } \bar{g} = ghg^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \bar{g} \in gH_xg^{-1}.$$

$\square$