VI Perusjoukoista (engl. fundamental set)

Määr. 6.1. Olk. G topologinen ryhmä ja X G-avaruus. Sanomme, että osajoukko $F \subset X$ on pieni (engl. small), jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa ympäristö U s.e. $\overline{G(F|U)}$ on kompakti.

(Vrt. Määr. 3.22: Toiminta on Palais-toiminta $\Leftrightarrow$ jokaisella X:n pisteellä on olemassa pieni ympäristö.)

Määr. 6.2. Olk. X, Y top. avaruuksia. Jatkuva kuvaus $f: X \to Y$ on vahva, jos se on suljettu kuvaus ja $f^{-1}(y)$ on kompakti $\forall y \in Y$.

Määr. 6.3. Olk. X G-avaruus. Osajoukko $F \subset X$ on perusjoukko (k.o. toiminnalle), jos
(1) $GF = X$
(2) F on pieni.

(Esim. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t \cdot (x,y) = (t+x, y)$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ on perusjoukko)

Lemma 6.4. Jos toiminnalle on olemassa perusjoukko, niin G on lokaalisti kompakti ja toiminta on Palais-toiminta.

Tod. Jos $F \subset X$ on perusjoukko, $x \in F$ ja U x:n ympäristö s.e. $\overline{G(F|U)}$ on kompakti, niin $e \in G(F|U)$ ja Harj. 8/Teht. 3 nojalla $G(F|U)$ on e:n ympäristö. Siis e:llä on ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti, mistä seuraa, että G on lok. kompakti.

"vähän enemmän kuin Palais" Valitaan jokaiselle $x \in X$ ympäristö U_x s.e. $\overline{G(F|U_x)}$ on kompakti. Osoitetaan, että tällöin $\overline{G(U_x|U_y)}$ on kompakti $\forall x, y \in X$, mistä väite seuraa:

olk. $g \in G(U_x|U_y)$. Siis $\exists$ $u \in U_x$, $u' \in U_y$ s.e. $gu' = u$.
Koska $GF = X$, niin $\exists$ $\bar{g}$ s.e. $\bar{g}u = f \in F$. Siis $\bar{g}g \in G(F|U_y)$.
$\bar{g}gu'$
Koska $\bar{g}^{-1}f = u \in U_x$, on siis $\bar{g}^{-1} \in G(U_x|F)$.
Nyt
$$g = \bar{g}^{-1}(\bar{g}g) \in G(U_x|F) \cdot G(F|U_y),$$
joten
$$\overline{G(U_x|U_y)} \subset \overline{G(F|U_x)}^{-1} \cdot \overline{G(F|U_y)}, \text{ joka on kompakti.}$$
$\square$

Lemma 6.5. Jos F on perusjoukko, niin myös $\overline{F}$ on.

Tod. Jos $GF = \overline{X}$, niin myös $G\overline{F} = \overline{X}$.
Olk. $x \in \overline{X}$ ja U ymp. s.e. $\overline{G(F|U)}$ on kompakti.
Jos $g \in G(\overline{F}|U)$, on siis $gU \cap \overline{F} \neq \emptyset$; jos avoin joukko leikkaa joukon sulkeumaa, se leikkaa myös itse joukkoa: siis $gU \cap F \neq \emptyset$, eli $g \in G(F|U)$.
Siis $G(\overline{F}|U) = G(F|U)$, joten $\overline{G(\overline{F}|U)} = \overline{G(F|U)}$ on kompakti. □

27.11.13 →

Lause 6.6. Olk. G lok. kompakti top. ryhmä, $\overline{X}$ Hausdorff vahva G-avaruus ja $F \Subset \overline{X}$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(1) F on perusjoukko.
(2) rata-avaruusprojektion $\pi : \overline{X} \to \overline{X}/G$ rajoittuma $\pi' = \pi|F$ on vahva surjektio.
(3) toimintakuvauksen $\Phi : G \times \overline{X} \to \overline{X}$ rajoittuma $\Phi' = \Phi|G \times F$ on vahva surjektio.

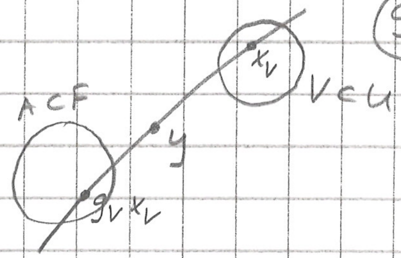
Tod.

(1) ⇒ (2):
- Koska $GF = \overline{X}$, on π' surjektio
- jos $\pi(x) \in \overline{X}/G$, niin $(\pi|F)^{-1}(\pi(x)) = G(F|\{x\})x$:

  "$\subset$" jos $y \in$ ↗, niin $y \in F$ ja $y \in \pi^{-1}\pi(x)$, joten $y = gx$ jollain g. Siis $g \in G(F|\{x\})$ ja $y = gx \in G(F|\{x\})x$.

  "$\supset$" jos $y \in G(F|\{x\})x$, niin $y = gx$ jollain $g \in G(F|\{x\})$. Tästä seuraa $gx \in F$ eli $y \in F$. Lisäksi $y \in \pi^{-1}\pi(x)$. Siis $y \in (\pi|F)^{-1}(\pi(x))$.

  Perusjoukon määr. ehdosta (2) seuraa, että $\overline{G(F|\{x\})}$ on kompakti. Lemman 3.10 nojalla $G(F|\{x\}) \Subset G$, joten pisteen alkukuva $(\pi|F)^{-1}(\pi(x)) = G(F|\{x\})x$
  $= \overline{G(F|\{x\})}x$ on kompakti.
- π' on suljettu kuvaus:
  olk. $A \Subset F$. väite: $\pi(A) \Subset \overline{X}/G$.
  olk. $\pi(x) \in \overline{\pi(A)}$. Valitaan x:in ymp. U s.e. $\overline{G(F|U)}$ on kompakti.
  Jos $x \in V \overset{\circ}{\subset} U$, niin $\pi(V) \overset{\circ}{\subset} \overline{X}/G$ (π avoin kuvaus), joten (koska $\pi(x) \in \overline{\pi(A)}$) $\exists\ \pi(y) \in \pi(A) \cap \pi(V)$.



Siis $\exists\, x_V \in V \subset U$ ja $g_V \in G$ s.e. $g_V x_V \in A \subset F$, jolloin siis $g_V \in G(F|U)$.
Joukot V ($x \in V \subset U$) muodostavat suunnatun joukon $\mathcal{V}$ ($V \geq V' \Leftrightarrow V \subset V'$) ja saadaan verkot $(x_V)_{\mathcal{V}}$ ja $(g_V)_{\mathcal{V}}$.
Nyt $x_V \to x$ ja (koska $\overline{G(F|U)}$ on kompakti), verkolla $(g_V)_{\mathcal{V}}$ on suppeneva osaverkko $(g_W)_{\mathcal{W}} \to g \in G$.
Nyt

$$g_W x_W \longrightarrow gx \in A, \quad \text{koska } g_W x_W \in A \subset F \subset \underline{X}.$$

Siis $\pi(x) \in \pi(A)$, joten $\overline{\pi(A)} = \pi(A)$ eli $\pi(A)$ on suljettu.

(2) ⇒ (3):
- koska $\pi|F$ on surjektio, niin $\Phi| : G \times F \to \underline{X}$ on surjektio.
- olkoon $(g_i, y_i)_i$ verkko avaruudessa $G \times F$, jolle verkko $(g_i y_i)$ suppenee $\underline{X}$:ssä.

Teoreeman B.13 nojalla riittää osoittaa, että verkolla $(g_i, y_i)_i$ on kasautumisarvo (eli Teoreeman B.9 nojalla suppeneva osaverkko) avaruudessa $G \times F$.
Koska $(g_i y_i)$ suppenee, suppenee myös $(\pi(g_i y_i)) = (\pi(y_i))$, joten oletuksen (2) (ja Teoreemojen B.12 ja B.9) nojalla verkolla (y_i) on suppeneva osaverkko $(y_j)_j$ F:ssä.
Tästä seuraa, että verkko $(g_j y_j, y_j)$ suppenee $\underline{X} \times \underline{X}$:ssä.
Nyt Lauseen 6.7 nojalla kuvaus

$$G \times \underline{X} \to \underline{X} \times \underline{X}, \quad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

on vahva, joten verkolla (g_j, y_j) on suppeneva osaverkko $G \times \underline{X}$:ssä, siis myös $G \times F$:ssä ($y_j \to y \in F$).

(3) ⇒ (1):
- koska $\Phi' : G \times F \to \underline{X}$ on surjektio, on $GF = \underline{X}$.
- Havaitaan ensin, että $(\Phi')^{-1}(x) = \{(g, g^{-1}x) \mid g \in G(\{x\}|F)\}$:

"⊂" jos $(g, y) \in (\Phi')^{-1}(x)$, niin $g \in G$, $y \in F$ ja $gy = x$.
Siis $y = g^{-1}x$ ja $g \in G(\{x\}|F)$.
"⊃" $\Phi'(g, g^{-1}x) = x$; lisäksi $g^{-1}x \in F$, koska $g \in G(\{x\}|F)$
($gy = x$ joll. $y \in F \Rightarrow g^{-1}x = y \in F$).
Koska Φ' on vahva, niin $(\Phi')^{-1}(x)$ on kompakti, joten $G(\{x\}|F) = pr_1((\Phi')^{-1}(x))$ on kompakti.

Os. seuraavaksi, että jokaista joukon $G(\{x\}|F)$ ympäristöä W kohti löytyy x:n ympäristö U s.e. $G(U|F) \subset W$:

Antiteesi: $\forall$ x:n ympäristöillä U $\exists$ $g_U \notin W$ ja $g_U \in G(U|F)$,
eli $\exists\, y_U \in F$ s.e. $g_U y_U = x_U \in U$. K.o. ympäristöt muodostavat suunnatun joukon ja verkolle (x_U) pätee $x_U \to x$.
Nyt $x_U = g_U y_U$ suppenee, joten ehdon (3) nojalla verkolla (g_U, y_U) on suppeneva osaverkko (g_V, y_V) $(G \times F)$:ssä.
Siis $g_V \to g \in G$, $y_V \to y \in F$ ja $g_V y_V = x_V \to x$, mistä seuraa $gy = x$, eli $g \in G(\{x\}|F)$. Nyt kuitenkin W on joukon $G(\{x\}|F)$ ympäristö ja $g_V \notin W$ $\forall V$, joten ei voi olla $g_V \to g$, ristiriita.

Koska $G(\{x\}|F)$ on kompakti ja G on lokaalisti kompakti, niin joukolla $G(\{x\}|F)$ on ympäristö W, jolle $\overline{W}$ on kompakti.
Edellisen nojalla x:llä on ymp. U s.e. $G(U|F) \subset W$, jolloin $\overline{G(U|F)}$ on kompakti.

Siis Määritelmän 6.3 ehto (2) on voimassa.

$\square$

Lause 6.7. Olk. G lokaalisti kompakti top. ryhmä ja $\underline{\overline{X}}$ Hausd. G-avaruus.
Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1) toiminta on vahva
2) kuvaus $\theta : G \times \underline{\overline{X}} \to \underline{\overline{X}} \times \underline{\overline{X}}$
$$(g,x) \mapsto (x, gx)$$
on vahva.

Tod. "$\Rightarrow$" 1) θ on suljettu kuvaus:
olk. $A \subset G \times \underline{\overline{X}}$ ja $(x_j, y_j)_j$ verkko joukossa $\theta(A)$, $(x_j, y_j) \to (x,y) \in \underline{\overline{X}} \times \underline{\overline{X}}$. Os., että $(x,y) \in \theta(A)$.
Valitaan jokaisella j alkio g_j s.e. $y_j = g_j x_j$, missä $(g_j, x_j) \in A$.
Valitaan seuraavaksi ympäristöt V_x ja V_y s.e. $K = \overline{G(V_y | V_x)}$ on kompakti.
Koska $x_j \to x$, $y_j \to y$, void. ol., että $x_j \in V_x$, $y_j \in V_y$ $\forall j$.
Tästä seuraa, että $g_j \in K$ $\forall j$, joten verkolla (g_j) on suppeneva osaverkko (g_α), merk. $g_\alpha \to g \in K$.
Koska A on suljettu, on $(g,x) \in A$ ja
$$(x,y) = \lim(x_\alpha, g_\alpha x_\alpha) = \lim \theta(g_\alpha, x_\alpha) = \theta \lim (g_\alpha, x_\alpha) = \theta(g,x) \in \theta(A).$$

2) $\vartheta^{-1}(x_0, y_0)$ on kompakti, kun $x_0, y_0 \in \bar{X}$:
Selvästi, jos $y_0 \notin Gx_0$, on $\vartheta^{-1}(x_0, y_0) = \emptyset$.
Jos taas $y_0 = g_0 x_0 \in Gx_0$, on $\vartheta^{-1}(x_0, y_0) = g_0 G_{x_0} \times \{x_0\}$:

"$\subset$" $(g, x) \in \vartheta^{-1}(x_0, y_0) \Rightarrow (x, gx) = (x_0, y_0)$
$\Rightarrow x = x_0$ ja $gx = gx_0 = y_0 = g_0 x_0$
$\Rightarrow g_0^{-1} g x_0 = x_0 \Rightarrow g_0^{-1} g \in G_{x_0} \Rightarrow g \in g_0 G_{x_0}$
Siis $(g, x) \in g_0 G_{x_0} \times \{x_0\}$.

"$\supset$" Seuraa siitä, että jos $\bar{g} \in G_{x_0}$, niin
$$\vartheta(g_0 \bar{g}, x_0) = (x_0, g_0 \underbrace{\bar{g} x_0}_{= x_0}) = (x_0, g_0 x_0) = (x_0, y_0).$$

Koska toiminta on vahva, on isotropiaryhmä G_{x_0} kompakti ja $\vartheta^{-1}(x_0, y_0) = g_0 G_{x_0} \times \{x_0\}$ on kompakti.

$\square$ "$\Rightarrow$"

$\xrightarrow{2.12.13}$

"$\Leftarrow$" olk. $x_0, y_0 \in \bar{X}$. Etsitään määritelmän ehdon ympäristöt V_{x_0}, V_{y_0}.

Tarkastellaan kuvausta
$$G \times \bar{X} \to G \times \bar{X} \times \bar{X}$$
$$(g, x) \mapsto (g, x, gx),$$
joka on upotus, merkitään kuvajoukkoa $D \subset G \times \bar{X} \times \bar{X}$.
Saadaan kuvaus
$$p: D \xrightarrow{\approx} G \times \bar{X} \xrightarrow{\vartheta} \bar{X} \times \bar{X}$$
$$(g, x, gx) \mapsto (g, x) \longmapsto (x, gx),$$
joka on vahva, koska ϑ on.

Olkoon $F = G \cup \{\infty\}$ yhden pisteen kompaktisointi.

Osoitetaan seuraavaksi, että $D \Subset F \times \bar{X} \times \bar{X}$:
Joukko $E = \{(g, g) \mid g \in G\} \Subset F \times G$, koska se on inkluusion $G \hookrightarrow F$ kuvaaja. Siis
$$U := (E \times \bar{X} \times \bar{X}) \cap (F \times D) \Subset F \times D \quad \subset F \times G \times \bar{X} \times \bar{X}.$$
Koska p on vahva, on
$$u = \mathrm{id} \times p : F \times D \to F \times \bar{X} \times \bar{X}$$
$$(h, g, x, y) \mapsto (h, x, y) \quad \text{suljettu (HT)}.$$
Nyt $u(U) = D$:

"$\subset$" Olk. $(h, g, x, y) \in U$. $(h, g) \in E \Rightarrow h = g \in G$;
$(g, x, y) \in D \Rightarrow y = gx$. Siis $u(g, g, x, y) = (g, x, gx) \in D$.

"$\supset$" Olk. $(g, x, gx) \in D$. Tällöin
$(g, g, x, gx) \in (E \times \bar{X} \times \bar{X}) \cap (F \times D)$ ja
$u(g, g, x, gx) = (g, x, gx)$.

Siis $D \Subset F \times \overline{X} \times \overline{X}$.

Nyt $(\{\infty\} \times \overline{X} \times \overline{X}) \cap D = \emptyset$, joten $\exists$ pisteen ∞ ympäristö $V \Subset F$ ja pisteen $(x_0, y_0) \in \overline{X} \times \overline{X}$ ympäristö $W \Subset \overline{X} \times \overline{X}$ s.e.

$$(V \times W) \cap D = \emptyset .$$

Koska F on G:n yhden pisteen kompaktisointi, voidaan valita $V = (G \setminus K) \cup \{\infty\}$, missä K on kompakti.

Jos nyt valitaan ympäristöt V_{x_0} ja V_{y_0} s.e. $V_{x_0} \times V_{y_0} \subset W$, on siis

$$((G \setminus K) \times (V_{x_0} \times V_{y_0})) \cap D = \emptyset .$$

Jos nyt $g \notin K$, $x \in V_{x_0}$ ja $y \in V_{y_0}$, niin $(g, x, y) \notin D$ eli $y \neq gx$.
Siis jos $g \notin K$, on $g V_{x_0} \cap V_{y_0} = \emptyset$ eli

$$G(V_{y_0} | V_{x_0}) \subset K ,$$

mistä väite seuraa, koska K on kompakti.

$\square$

Ryhdymme nyt osoittamaan olemassaololausetta perusjoukoille.

<u>Lause 6.8.</u> Olk. G top. ryhmä, X Hausd. G-avaruus.
Merkitään $\pi : X \to X/G$ rata-avaruusprojektio. Jos $\mathcal{U}$ on perhe X:n pieniä osajoukkoja ja jos perhe $(\pi(U) \mid U \in \mathcal{U})$ on lokaalisti äärellinen, niin yhdiste $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ on pieni.

<u>Tod.</u> Olk. $x \in X$ ja V' $\pi(x)$:n ympäristö, joka leikkaa vain äärellisen montaa joukoista $\pi(U)$. Silloin $V = \pi^{-1}(V')$ on x:n ympäristö ja $\pi(V) = \pi\pi^{-1}(V') = V'$.
Nyt $G(V|U) \neq \emptyset$ vain äärellisen monella $U \in \mathcal{U}$ (koska jos $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$, niin $G(V|U) = \emptyset$), olkoot nämä $U_1, \ldots, U_n$.
Koska joukot $U_1, \ldots, U_n$ ovat pieniä, voidaan jokaisella $i = 1, \ldots, n$ valita x:n ymp. $W_i \subset V$ s.e. $\overline{G(W_i|U_i)}$ on kompakti.
Val. sitten $W = W_1 \cap \ldots \cap W_n$, joka on x:n ympäristö ja

$$G\Big(W \Big| \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\Big) \overset{3.2.}{=} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} G(W|U) = \bigcup_{i=1}^{n} G(W|U_i)$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{G(W|U_i)}, \text{ joka on kompakti.}$$

□

<u>Lemma 6.9.</u> Olk. G lok. kompakti, X Cartan Hausd. G-avaruus.
Jos X/G on säännöllinen, niin toiminta toteuttaa Palais'n ehdon.

<u>Tod.</u> Merk. $\pi : X \to X/G$.
Olk. $x \in X$ ja ympäristö $U_1 \circledcirc X$ s.e. $\overline{G(U_1|U_1)}$ on kompakti.
Nyt $\pi(x) \in \pi(U_1) \circledcirc X/G$, joten (koska X/G on säännöllinen), $\exists$ $\pi(x)$:n ymp. W s.e. $\overline{W} \subset \pi(U_1)$.
Os., että $U = U_1 \cap \pi^{-1}W$ on x:n pieni ympäristö:
olk. $y \in X$. Jos $\pi(y) \notin \overline{W}$, niin valitsemalla $V = X \setminus \pi^{-1}(\overline{W})$ saadaan $y \in V \circledcirc X$ ja $G(U|V) = \emptyset$.
Jos taas $\pi(y) \in \overline{W} \subset \pi(U_1)$, niin $y \in gU_1$ jollakin $g \in G$, ja valitsemalla $V = gU_1$ saadaan

$$G(U|V) \subset G(U_1 \mid gU_1) \overset{3.4.}{=} G(U_1|U_1)g^{-1} \subset \overline{G(U_1|U_1)}g^{-1},$$

joka on kompakti.

□

Teoreema 6.10. Olk. G lok. komp. top. ryhmä ja $\overline{X}$ Hausd. vahva G-avaruus, s.e. rata-avaruus $\overline{X}/G$ on parakompakti. Tällöin toiminnalle on olemassa avoin perusjoukko.

Tod. Koska parakompakti $\Rightarrow$ normaali $\Rightarrow$ säännöllinen, niin $\overline{X}$ on Palais'n G-avaruus edellisen Lemman nojalla.
Siis jokaisella pisteellä $x \in \overline{X}$ on pieni ympäristö U_x.
Koska $\overline{X}/G$ on parakompakti, on peitteellä $\mathcal{U} = \{ \pi(U_x) \mid x \in \overline{X} \}$ avoin lokaalisti äärellinen tihennys $\mathcal{V}$. Siis $\exists$ funktio

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$$
$$V \mapsto U_V,$$

s.e. $V \subset \pi(U_V) \, (\subset \overline{X}/G)$.
Jokaisella $V \in \mathcal{V}$ määritellään $W_V = U_V \cap \pi^{-1} V \subset \overline{X}$.
Joukot W_V ovat pieniä ja

$$\pi(W_V) = \pi(U_V \cap \pi^{-1} V) = \pi(U_V) \cap V = V,$$

joten perhe

$$\{ \pi(W_V) \mid V \in \mathcal{V} \}$$

on lokaalisti äärellinen. Jos nyt määritellään

$$F = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} W_V,$$

niin ed. lauseen nojalla F on pieni.
Lisäksi

$$\pi(F) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \pi(W_V) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \overline{X}/G.$$

Siis F on perusjoukko. Selvästi F on avoin. $\square$

Yleisempi muoto:

Teoreema 6.11. Olk. G lok. komp. top. ryhmä ja $\overline{X}$ Hausd. vahva G-avaruus, s.e. rata-avaruus $\overline{X}/G$ on parakompakti. Olkoon lisäksi $A \subset \overline{X}$ pieni. Tällöin toiminnalle on olemassa avoin perusjoukko, joka sisältää joukon A.

Tod. HT $\square$

Perusjoukon olemassaololause sisältää oletuksen "$\mathbb{X}/G$ parakompakti". On olemassa lukuisia erikoistapauksia, joissa tiedetään, että $\mathbb{X}/G$ on parakompakti, mutta tietääkseni ei tiedetä, päteekö yleisesti "G lok. komp., $\mathbb{X}$ parakomp. vahva' G-avaruus $\Rightarrow$ $\mathbb{X}/G$ parakomp.".

Lause 6.12. Olk. G lok. kompakti ja $\mathbb{X}$ on N_2 topologinen monisto, jolla G:n toiminta on vahva'. Tällöin $\mathbb{X}/G$ on parakompakti.

Tod. Huom. Lauseen 3.25 nojalla tässä vahva $\Leftrightarrow$ vahva' ($\mathbb{X}$ lok. komp.). Koska $\mathbb{X}$ on N_2, se on Lindelöf; koska $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}/G$ on jatk. avoin surjektio, on $\mathbb{X}/G$ Lindelöf [Dugundji, VIII, 6.6]. Lauseen 3.19 nojalla $\mathbb{X}/G$ on lokaalisti kompakti ja Hausdorff, joten [Väisälä, 17.4] $\Rightarrow$ $\mathbb{X}/G$ on säännöllinen. Siis $\mathbb{X}/G$ on Lindelöf ja säännöllinen, joten [Dugundji, VIII, 6.5] $\Rightarrow$ $\mathbb{X}/G$ on parakompakti.

$\square$

Lause 6.13. Olk. G lok. kompakti ja $\mathbb{X}$ vahva' G-avaruus, jolla on G-invariantti metriikka. Tällöin $\mathbb{X}/G$ on parakompakti.

Tod. Harj. 13/Tent. 5 $\Rightarrow$ $\mathbb{X}/G$ on metristyvä.
[Dugundji, IX, 5.3] $\Rightarrow$ $\mathbb{X}/G$ on parakompakti.

$\square$

4.12,13 $\longrightarrow$

Kurssin loppupuolen tavoitteena on todistaa upotustulos: tietyt ehdot toteuttavat G-avaruudet voidaan upottaa Banach G-avaruuteen (Banach-avaruus, jossa G toimii lin. isomorfismeilla).

Tarvitsemme Haarin integraalia lokaalisti kompakteille ryhmille, kts. esim. [Husain: Introduction to topological groups, luku VI]:

Let G be a locally compact Hausdorff topological group. Then there exists a non-trivial (= not identically zero), non-negative, left-invariant, positive homogeneous, additive, functional I on $C_0^+(G)$.

Tässä
- $C_0^+(G) = \{ f : G \to \mathbb{R} \mid f$ jatkuva kompaktikantajainen funktio, $f \geq 0 \}$
- functional : $I : C_0^+(G) \to \mathbb{R}$
- additive : $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$
- pos. homog. : $I(\lambda f) = \lambda I(f)$, $\lambda \geq 0$
- left invariant : $I(L_h f) = I(f)$ $\forall h \in G$.

- non-negative : $I(f) \geq 0$.

Kun verrataan Teoreeman 4.1 ominaisuuksiin, huomataan pari eroa:
- integraali ei ole määritelty kaikille jatkuville funktioille (y.o. tulos voidaan helposti laajentaa koskemaan joukkoa $C_0(G)$ = jatkuvat komp. kantajaiset funktiot)
- ehto $I(1) = 1$ puuttuu, koska vakiofunktio 1 ei ole kompaktikantajainen, jos G on epäkompakti.
- ehto $I(R_h f) = I(f)$ puuttuu: on ol. ryhmiä, joille ei ole olemassa integraalia, joka olisi sekä oikealta että vasemmalta invariantti. Y.o. tuloksessa voitaisiin "left invariant" korvata ominaisuudella "right invariant".

Voidaan osoittaa:
- I on vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen: jos J toteuttaa y.o. ehdot, niin $\exists\, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ s.e.
$$J(f) = c \cdot I(f) \qquad \forall f \in C_0^+(G).$$
- $f \geq 0$, f ei identtisesti 0 $\Rightarrow$ $I(f) > 0$.

Upotustulos, jonka todistamme, on sukua Kuratowskin upotuslauseelle, kts. esim. [Väisälä: Top. I, harj. teht. 2:16]:

olk. X metr. avaruus, $x_0 \in X$, $a \in X$.

Määr. $f_a : X \to \mathbb{R}$
$$f_a(x) = d(x,a) - d(x,x_0).$$
Nähdään, että f_a on rajoitettu, joten saadaan
$$\varphi : X \to Raj(X,\mathbb{R})$$
$$a \longmapsto f_a$$
Sup-normilla varustettuna $Raj(X,\mathbb{R})$ on Banachin avaruus. Kuvaus φ on upotus.

Jos X on G-avaruus, joissakin tilanteissa voidaan määritellä G:n toiminta $\Phi : G \times Raj(X,\mathbb{R}) \to Raj(X,\mathbb{R})$
$$(\Phi(g,f))(x) = f(g^{-1}x).$$
Tämä toiminta ei välttämättä ole jatkuva, kts. Harj. 13/Teht. 6.

Osoittautuu hyväksi tutkia tiettyjä vektoriavaruuden $Raj(X,\mathbb{R})$ aliavaruuksia, kuten kompaktikantajaisia funktioita tai funktioita, jotka "häviävät äärettömyydessä" (määritelmä alla).

Määr. 6.14. Jos X on topologinen avaruus ja $f: X \to \mathbb{R}$ jatkuva, sanomme, että f häviää äärettömyydessä, jos
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ kompakti } K \subset X \text{ s.e. } |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus K.$$
Merk.
$$D(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva ja häviää äärettömyydessä} \}.$$

Kun määritellään $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
$$(cf_1)(x) = c \cdot f_1(x) \qquad , f_1, f_2 \in D(X), \ c \in \mathbb{R}, \ x \in X,$$
ja normi $\|f\| = \max \{ |f(x)| \mid x \in X \}$,
$D(X)$ on Banachin avaruus, eli täydellinen normiavaruus (HT).
Olk. G lok. komp. ryhmä ja X Hausd. G-avaruus.
Määritellään toiminta (yksityiskohdat HT)
$$G \times D(X) \to D(X) \qquad (*)$$
kaavalla
$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) \qquad , g \in G, f \in D(X), x \in X$$

Lause 6.15. Yllä määritelty toiminta on jatkuva.
(Huom. y.o. kaavan määrittelemä toiminta ei välttämättä ole jatkuva avaruudessa $\mathrm{Raj}(X, \mathbb{R}) \supset D(X)$.)

Tod. Olk. $f \in D(X)$. Os. jatkuvuus pisteessä $(e, f) \in G \times D(X)$ (yleinen tapaus tehdään vastaavasti, mutta merkinnät tulevat monimutkaisemmiksi).
Olk. $\varepsilon > 0$.
On siis löydettävä e:n ymp. U G:ssä ja f:n ymp. U' $D(X)$:ssä s.e.
$$\|gh - f\| < \varepsilon \quad \forall g \in U, h \in U'$$
eli $\max \{ |(gh)(x) - f(x)| \mid x \in X \} < \varepsilon$
eli $\max \{ |h(g^{-1}x) - f(x)| \mid x \in X \} < \varepsilon$
eli $|h(g^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall g \in U, h \in U', x \in X.$

Δ-ey:n nojalla
$$|h(g^{-1}x) - f(x)| \le |h(g^{-1}x) - f(g^{-1}x)| + |f(g^{-1}x) - f(x)|.$$

Val. aluksi e:n ymp. V s.e. $\overline{V}$ on kompakti ja X:n kompakti osajoukko K s.e. $|f(x)| < \varepsilon/4 \quad \forall x \in X \setminus K$.

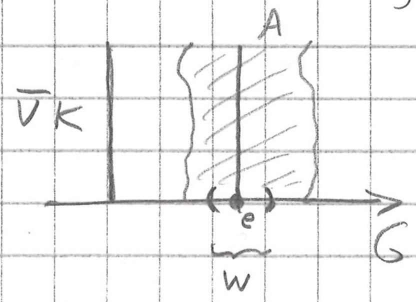
Jokaisella $x \in \mathbb{X} \setminus \bar{V}K$ ja $g \in \bar{V}$ on $g^{-1}x \in \mathbb{X} \setminus K$
($g^{-1}x \in K \Rightarrow x = gg^{-1}x \in \bar{V}K$), joten
$$|f(g^{-1}x) - f(x)| \leq |f(g^{-1}x)| + |f(x)| < \varepsilon/2 .$$
Koska $\bar{V}K$ on kompakti, löydetään e:n ymp. W s.e.
$$|f(g^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall g \in W,\ x \in \bar{V}K. \qquad (*)$$

Jos $g \in V \cap W$, niin $|f(g^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in \mathbb{X}$.

Jos nyt $g \in V \cap W$ ja $h \in B(f, \varepsilon/2)$, on
$$|h(g^{-1}x) - f(x)| \leq |h(g^{-1}x) - f(g^{-1}x)| + |f(g^{-1}x) - f(x)|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$
$\square$

Lisäys välivaiheeseen $(*)$:

Tark. jatkuvaa funktiota
$$\varphi : G \times \bar{V}K \to \mathbb{R}$$
$$(g, x) \mapsto f(g^{-1}x) - f(x)$$



Koska $\varphi(e, x) = 0 \ \forall x$, on joukko
$$A = \varphi^{-1}\,]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$$
joukon $\{e\} \times \bar{V}K$ ympäristö.
Koska $\bar{V}K$ on kompakti, $\exists$ e:n ymp. W s.e. $W \times \bar{V}K \subset A$, jolloin siis
$$-\varepsilon/2 < \varphi(g, x) = f(g^{-1}x) - f(x) < \varepsilon/2$$
$$\forall g \in W,\ x \in \bar{V}K.$$

Huom. 6.16 Toiminta $(*)$ ei toteuta edes Cartanin ehtoa, jos G on epäkompakti. Vakiofunktio $\underline{0}$ on nimittäin toiminnan kiintopiste (eli $g\underline{0} = \underline{0} \ \forall g$), joten $G(U|U) = G$ jokaisella $\underline{0}$:n ympäristölle U.

Lause 6.17. Toiminnan rajoittuma
$$G \times (D(\mathbb{X}) \setminus \{0\}) \to D(\mathbb{X}) \setminus \{0\}$$
toteuttaa Palais'n ehdon.

Tod. Olk. $f, h \in D(\mathbb{X}) \setminus \{0\}$ ja olk. $\delta = \frac{\|f\|}{2} > 0$.
Val. $\mathbb{X}$:n kompakti osajoukko K s.e. $|h(x)| < \delta/2 \quad \forall x \in \mathbb{X} \setminus K$
ja val. $x_0 \in \mathbb{X}$ s.e. $|f(x_0)| = \|f\| = 2\delta$.
Os., että
$$G(B(f,\delta) \mid B(h, \delta/2)) \subset G(\{x_0\} \mid K), \text{ joka on kompakti.}$$
Jos $f' \in B(f,\delta)$ ja $h' \in B(h, \delta/2)$ ja $f' = gh'$ jollakin $g \in G$,
niin
$$|h'(g^{-1}x_0)| = |f'(x_0)| > \delta.$$
Siis
$$|h(g^{-1}x_0)| > \delta/2, \text{ joten } g^{-1}x_0 \in K, \text{ joten } g \in G(\{x_0\} \mid K).$$
$\square$

Metriselle avaruudelle $(\mathbb{X}, d)$ tulemme määrittelemään upotuksen
$$i : \mathbb{X} \to D(\mathbb{X})$$
kaavalla
$$i(x)(y) = \begin{cases} 1 - d(x,y), & \text{jos } 0 \le d(x,y) \le 1 \\ 0, & \text{jos } d(x,y) \ge 1. \end{cases}$$

Ongelma: jos $\mathbb{X}$ on epäkompakti ja esim. $d(x,y) < \frac{1}{2} \ \forall x,y$, niin $i(x) \notin D(\mathbb{X})$.
Jos metriikalla on esim. ominaisuus:
$$\text{jollakin kiinteällä } r > 0 \text{ on } \overline{B}(x,r) \text{ kompakti } \forall x,$$
~~tätä~~ ongelmaa ei tule.
Osoitamme myöhemmin:

Lause 6.18. Oletetaan, että $\mathbb{X}$ on vahva G-avaruus (G lok. kompakti), $\mathbb{X}/G$ on parakompakti ja ol. että $\mathbb{X}$:llä on metriikka d, jolla on ominaisuus:
$$\forall r > 0 \ \forall x \in \mathbb{X} : \underbrace{\overline{B}_d(x,r)}_{= \{y \in \mathbb{X} \mid d(x,y) \le r\}} \text{ on kompakti.} \qquad (**)$$

Tällöin on olemassa $\mathbb{X}$:n G-invariantti metriikka $\hat{d}$ (ekvivalentti d:n kanssa), jolle
$$\overline{B}_{\hat{d}}(x,1) \text{ on kompakti } \forall x \in \mathbb{X}. \qquad (***)$$

Huom. 6.19. Jos $\underline{X}$ on N_2 topologinen monisto, niin $\underline{X}$:llä $\exists$ metriikka d, jolla on ominaisuus $(**)$:
Void. os., että $\underline{X}$ voidaan upottaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetuksi osajoukoksi, jolloin
$\underline{X}$:n sulj. kuula $= \underline{X} \cap \mathbb{R}^n$:n sulj. kuula,
joka on suljettu ja rajoitettu $\mathbb{R}^n$:ssä, eli kompakti.

Rata-avaruus $\underline{X}/G$ on parakompakti Lauseen 6.13 nojalla.

9.12.13 $\longrightarrow$

Teoreema 6.20. Olk. G lokaalisti kompakti ja $\underline{X}$ vahva G-avaruus, jolla on G-invariantti metriikka $\hat{d}$ s.e. $\overline{B}_{\hat{d}}(x,1)$ on kompakti $\forall x \in \underline{X}$.
Tällöin $i: \underline{X} \to D(\underline{X})$

$$i(x)(y) = \begin{cases} 1 - \hat{d}(x,y), & \text{jos } 0 \le \hat{d}(x,y) \le 1 \\ 0, & \text{jos } \hat{d}(x,y) \ge 1 \end{cases}$$

on G-ekvivariantti upotus ja $i(\underline{X}) \in D(\underline{X})$.

Tod. Koska jokaiselle $x \in \underline{X}$ funktio $i(x)$ häviää kompaktin joukon $\overline{B}(x,1)$ ulkopuolella, on $i(x) \in D(\underline{X})$ $\forall x \in \underline{X}$.
i on G-ekvivariantti, koska $\hat{d}$ on G-invariantti:

$$i(gx)(y) = \begin{cases} 1 - \hat{d}(gx,y), & 0 \le \hat{d}(gx,y) \le 1 \\ 0, & d(gx,y) \ge 1. \end{cases}$$

$$g(i(x))(y) = \begin{cases} 1 - \hat{d}(x,g^{-1}y), & 0 \le \hat{d}(x,g^{-1}y) \le 1 \\ 0, & \hat{d}(x,g^{-1}y) \ge 1. \end{cases}$$

Nämä ovat samat, koska $\hat{d}(gx,y) = \hat{d}(g^{-1}(gx), g^{-1}y) = \hat{d}(x,g^{-1}y)$.

Ei ole vaikea tarkistaa, että

$$\| i(x) - i(y) \| \le d(x,y) \quad \forall x,y \in \underline{X}, \quad (HT)$$
$$= \max\{ | i(x)(z) - i(y)(z) | \mid z \in \underline{X} \}$$

Tästä seuraa, että i on jatkuva.

Selvästi i on injektio, koska jos $x \neq y$, niin
$$i(x)(x) = 1 \quad \text{ja} \quad i(y)(x) = 1 - \hat{d}(y,x) \neq 1,$$
eli $i(x) \neq i(y)$.

Käänteisfunktion $i^{-1}: i(\underline{X}) \to \underline{X}$ jatkuvuuden osoittamiseksi tehdään kaksi havaintoa:

Jos $d(x,y) \le 1$, niin
$$\| i(x) - i(y) \| \ge | i(x)(x) - i(y)(x) | = | 1 - (1 - \hat{d}(y,x)) | = \hat{d}(x,y), \quad (1)$$
joten jos $\hat{d}(x,y) \le 1$, niin
$$\| i(x) - i(y) \| = \hat{d}(x,y). \quad (2)$$
Lisäksi jos $\hat{d}(x,y) > 1$, niin
$$\| i(x) - i(y) \| \ge | i(x)(x) - i(y)(x) | = 1. \quad (3)$$

i^{-1} jatkuva:
Olk. $0 < \varepsilon < 1$. (Val. $\delta = \varepsilon$)
Jos $\| i(x) - i(y) \| < \varepsilon < 1$, niin $(3) \Rightarrow \hat{d}(x,y) \le 1$
ja
$$(2) \Rightarrow \hat{d}(x,y) = \| i(x) - i(y) \| < \varepsilon.$$

Lopuksi os., että $i(\overline{X}) \in D(\overline{X})$:
Olk. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jono joukossa $i(\overline{X})$, $f_n \to f \in D(\overline{X})$.
V. $f \in i(\overline{X})$.
T. Val. $x_n \in \overline{X}$ s.e. $f_n = i(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Olk. $N \in \mathbb{N}$ s.e. $\| f_n - f_m \| < 1/2$ $\forall n,m > N$.
Tällöin $(3) \Rightarrow \hat{d}(x_n, x_m) \le 1$ ja $(2) \Rightarrow$
$$d(x_n, x_m) = \| f_n - f_m \| \quad \forall n,m > N.$$
Siis jono (x_n) on Cauchy-jono $\overline{X}$:ssä.
Void. os., että $\overline{X}$:n metriikka on täydellinen, koska $\overline{B}(x,1)$ on kompakti $\forall x \in \overline{X}$, [Dugundji, Th. XIV, 2.3],
joten $x_n \to x \in \overline{X}$.
Nyt i:n jatkuvuuden nojalla $i(x) = f$, joten $f \in i(\overline{X})$.

$\square$

Lopuksi todistetaan Lause 6.18. :

Valitaan aluksi e:n symmetrinen ympäristö K, s.e. $\overline{K}$ on kompakti, ja jatkuva $f: G \to [0,1]$ s.e. $f(e) = 1$ ja $f|_{G \setminus \overline{K}} \equiv 0$.
(jokainen top. ryhmä on n.s. täysin säännöllinen avaruus, kts. esim. [Pontryagin: Top. groups, 2nd Ed., Th. 10, s.105].
Olkoon $\int_G \cdot \, dg$ oikealta-invariantti Haarin integraali ryhmälle G.
Koska integraali on vain vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen, void. ol., että

$$\int_G f \, dg > 1 . \qquad (\text{Huom! } f \text{ kompaktikantajainen})$$

Teoreeman 6.10 nojalla toiminnalle on olemassa avoin perusjoukko F. Tällöin myös KF ja $\overline{KF}$ ovat perusjoukkoja ja Teoreeman 6.11 nojalla $\exists$ avoin perusjoukko B s.e. $\overline{KF} \subset B$.

Jokaisella $x \in \overline{KF}$ val. ympäristö $U_x \subset B$. Tällöin joukot

$$\{U_x\}_{x \in \overline{KF}}, \quad X \setminus \overline{KF}$$

ovat X:n avoin peite, valitaan sille avoin lok. äärellinen tihennys $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. ($X$ metr. $\Rightarrow$ X parakomp.)
Teoreeman [Dugundji: VII, 6.1] nojalla $\exists$ X:n avoin peite $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ s.e.

$$\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Void. ol. $W_\alpha \neq \emptyset$ $\forall \alpha$.

Jokaisella $\alpha \in \mathcal{A}$ valitaan jatkuva

$$\varphi_\alpha : X \to [0,1]$$

$$\text{s.e.} \quad \varphi_\alpha | \overline{W_\alpha} \equiv 1 \quad \text{ja} \quad \varphi_\alpha | (X \setminus V_\alpha) \equiv 0 .$$

Sitten määr.

$$d'(x,y) = d(x,y) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(y)| .$$

Void. os., että d' on X:n metriikka, joka on ekvivalentti alkup. metriikan d kanssa.
Huom. ominaisuus (**) $\overline{B}_d(x,r)$ kompakti $\forall r$ $\forall x$ on voimassa myös metriikalle d', koska $d'(x,y) \geq d(x,y)$ $\forall x,y$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tärkeä havainto: jos } x \in \overline{KF} \text{ ja } y \in X \setminus B, \text{ niin } \exists\, \alpha \in \mathcal{A} \\ \text{s.e. } x \in W_\alpha \subset V_\alpha \subset B. \text{ Siis } \varphi_\alpha(x) = 1 \text{ ja } \varphi_\alpha(y) = 0, \text{ joten} \\ \qquad d'(x,y) > 1 . \end{array} \right\} (1)$$

Seuraava G-invariantin metriikan konstruktio löytyy teoksesta [J.L. Koszul: Lectures on groups of transformations, 1965]:
Määritellään jokaisella $x \in \bar{X}$

$$r(x) = d'(x, \bar{X} \setminus B),$$

$$h(x,y) = \min\{d'(x,y), r(x)+r(y)\}, \quad x,y \in \bar{X}$$

ja

$$D(x,y) = \int_G h(gx,gy)\,dg.$$

Void. os., että D on G-inv. metriikka, joka indusoi $\bar{X}$:n topologian.
Huom. funktiota r tarvittiin, jotta integroitavat funktiot olisivat kompaktikantajaisia:
olk. $x,y \in \bar{X}$; U_x, U_y ympäristöt s.e. $\overline{G(B|U_x)}$, $\overline{G(B|U_y)}$ komp.
Jos $gx \notin B$ ja $gy \notin B$, on $r(gx) = r(gy) = 0$ ja siis $h(gx,gy) = 0$. Siis jos $h(gx,gy) > 0$, on $gx \in B$ tai $gy \in B$, joten $g \in G(B|U_x) \cup G(B|U_y)$.
Tästä seuraa, että (kun ajatellaan $h: G \to \mathbb{R}$, x,y kiinteitä)

$$\mathrm{spt}(h) \subset \overline{G(B|U_x)} \cup \overline{G(B|U_y)},$$ joka on kompakti.

Huomataan, että $r(x) \geq 1 \quad \forall x \in \overline{KF}$ (seuraa havainnosta (1)).

Lopuksi os., että $\bar{B}_D(x,1)$ on kompakti $\forall x \in \bar{X}$.
Olk. $x \in \bar{X}$.
Koska metriikka D on G-invariantti, on $\bar{B}_D(gx,1) = g\bar{B}_D(x,1)$ $\forall g \in G$, joten void. ol., että $x \in F$. (F perusjoukko $\Rightarrow GF = \bar{X}$).
Merk.

$$C = \bigcup_{g \in K} \bar{B}_{d'}(gx,1).$$

Koska K on kompakti, niin $\exists \max\{d'(x,gx) \mid g \in K\} \overset{\text{merk.}}{=} \delta$
ja nyt

$$C \subset \bar{B}_{d'}(x, \delta+1),$$ joka on kompakti.

Havaitaan, että jos $y \in \bar{X}$ on sellainen, että $d'(gx,gy) < 1$ jollakin $g \in K$, niin $gy \in C$ ja $y \in KC \subset K\bar{B}_{d'}(x,\delta+1)$, joka on kompakti.

Olemme siis osoittaneet, että jos $y \notin KC$, niin $d'(gx,gy) \geq 1$ $\forall g \in K$.

Lisäksi, koska $x \in F$, niin $gx \in \overline{KF}$ ja siis $r(gx) \geq 1$ $\forall g \in K$.
Siis

$$h(gx, gy) = \min\{d'(gx, gy), r(gx) + r(gy)\} \geq 1 \quad \forall\, y \notin KC,\ g \in K,$$

ja

$$D(x,y) = \int_G h(gx, gy)\, dg \geq \int_G f\, dg > 1 \quad \forall\, y \notin KC .$$

jos $g \in K$ ja $y \notin KC$, niin $h(gx, gy) \geq 1 \geq f(g)$
jos $g \notin K$, niin $h(gx, gy) \geq 0 = f(g)$

Tämä osoittaa, että $\overline{B}_D(x,1) \subset KC \subset \underbrace{K\overline{B}_{d'}(x, \delta+1)}_{\text{kompakti}}$.

$\square$