

V Viipaleet G -avaruudessa (engl. slices)

Olk. G topologinen ryhmä ja $H \leq G$.
Jos \bar{X} on H -avaruus, konstruoinme \bar{X} :stä G -avaruuden seuraavasti:

Tuloavaruudessa $G \times \bar{X}$ määritellään H :n toiminta
$$h \cdot (g, x) = (gh^{-1}, hx). \quad (*)$$

Tämän toiminnan rata-avaruutta $G \times \bar{X} / H$ merkitään $G \times_H \bar{X}$,
merkitään lisäksi $\pi: G \times \bar{X} \rightarrow G \times_H \bar{X}$ rata-avaruusprojektiio.
Alkion (g, x) H -rataa merkitään $[g, x]$.

Määr. G :n toiminta
$$\tilde{\varphi}: G \times (G \times_H \bar{X}) \rightarrow G \times_H \bar{X}$$

$$(g', [g, x]) \mapsto [g'g, x]. \quad (**)$$

Tämä on hyvin määr. jatkuva toiminta (HT).

G -avaruutta $G \times_H \bar{X}$ sanotasa useik (H -avaruuden \bar{X})
indusoiduksi G -avaruudeksi.

Määritellään sitten kuvaukset

$$i_e: \bar{X} \rightarrow G \times \bar{X}$$

$$x \mapsto (e, x)$$

ja

$$i = \pi \circ i_e: \bar{X} \rightarrow G \times_H \bar{X}$$

$$x \mapsto [e, x].$$

suljettu

Lause 5.1. Jos H on kompakti, niin i on H -ekuivariantti upotus.

Tod.

- i on jatkuva: ok.
- i on H -ekuivariantti:

$$i(hx) = [e, hx] \stackrel{(*)}{=} [eh, h^{-1}(hx)]$$

$$= [h, x] \stackrel{(**)}{=} h[e, x] = hi(x).$$

- i injektio: Jos $i(x) = i(y)$, on siis $[e, x] = [e, y]$,
joten $(x) \Rightarrow \exists h \in H$ s.e. $(eh^{-1}, hx) = (e, y)$.
Tästä seuraa $eh^{-1} = e$ eli $h = e$ ja $x = hx = y$.

- i suljettu kuvaus: i_e on suljettu kuvaus. Samoin π on suljettu Teoreeman 2.13. nojalla.
Siis i on sulj. kuvaus.



Projektiio $G \times \bar{X} \rightarrow G$ indusoi projektion

$$p: G \times_H \bar{X} \rightarrow G/H$$

$$[g, x] \mapsto gH \quad (HT).$$

□

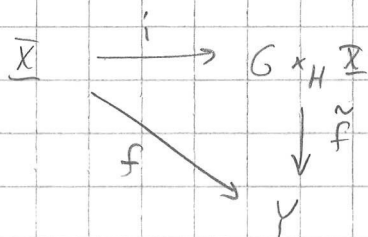
Indusoidulla G -avaruudella on seuraava universaaliominaisuus:

Teoreema 5.3.

Jos Y on G -avaruus ja $f: \bar{X} \rightarrow Y$

H -ekvivariantti jatkava kuvaus, niin on olemassa

yksikäsitteinen G -kuvaus $\tilde{f}: G \times_H \bar{X} \rightarrow Y$ s.e. kaavio



(*)

kommutoi.

Tod. Määr. \tilde{f} kaavalla

$$\tilde{f}([g, x]) = gf(x), \quad g \in G, x \in \bar{X}.$$

- \tilde{f} hyvin määr.: jos $[g, x] = [g', x']$, on siis $(gh^{-1}, hx) = (g', x')$ jollakin $h \in H$. Nyt

$$\tilde{f}([g', x']) = \tilde{f}([gh^{-1}, hx]) = gh^{-1}f(hx)$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{f \text{ H-ekviv.}}{=} gh^{-1}hf(x) = gf(x) = \tilde{f}([g, x]).
 \end{aligned}$$

- kaavio kommutoi: $\tilde{f}(i(x)) = \tilde{f}([e, x]) = ef(x) = f(x)$ ok.

- \tilde{f} on G -ekvivariantti:

$$\tilde{f}(g'[g, x]) = \tilde{f}([g'g, x]) = (g'g)f(x)$$

$$= g'(gf(x)) = g'\tilde{f}([g, x]).$$

- \tilde{f} jatkava: merk. $\mathcal{F}: G \times Y \rightarrow Y$ G :n toiminta Y :ssä.

Saadetaan kommutoiva kaavio

$$G \times \bar{X} \xrightarrow{id \times f} G \times Y$$

$$(g, x) \longmapsto (g, f(x))$$

$$\uparrow \downarrow \quad \downarrow \mathcal{F}$$

$$G \times_H \bar{X} \xrightarrow{\tilde{f}} Y$$

$$[g, x] \longmapsto gf(x)$$

Koska $id \times f$ ja \mathbb{Z} ovat jatkuvia ja π on tekijäkuvauks, on \tilde{f} jatkuva Lemman 1.18 nojalla.

• Yksikäsitteisyys:

Jos $\tilde{f}': G \times_H \mathbb{Z} \rightarrow Y$ on toinen jatkuva G -kuvauks, jolle $\tilde{f}' \circ i = f$, niin \tilde{f}' G -equiv.

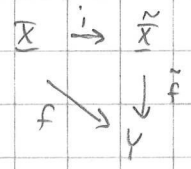
$$\tilde{f}'([g, x]) = \tilde{f}'(g[e, x]) = g \tilde{f}'([e, x]) = g \tilde{f}'i(x) = g f(x) = \tilde{f}([g, x]), \forall g, x.$$

Siis $\tilde{f}' = \tilde{f}$, mikä osoittaa yksikäsitteisyyden. □

4.11.13 →

Teoreema 5.4. Jos H on top. ryhmän G aliryhmä ja \mathbb{Z} on H -avaruus, niin \exists yksikäsitteinen Gravaruus $\tilde{\mathbb{Z}}$ ja yksikäsitteinen injekttiivinen H -kuvauks $i: \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$, jolla on Teoreeman 5.3 universaaliominaisuus (*):

Jos Y on Gravaruus ja $f: \mathbb{Z} \rightarrow Y$ on jatkuva H -kuvauks, niin \exists yksikäsitteinen G -kuvauks \tilde{f} s.e. kaavio

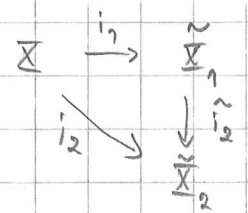


kommutoi.

Tod. Olemassaolo seuraa ed. teoreemasta ($\tilde{\mathbb{Z}} = G \times_H \mathbb{Z}$).

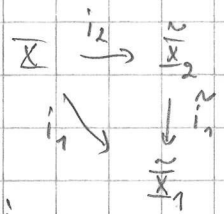
Yksikäsitteisyys:

Ol., että kuvauksilla $i_1: \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}_1$ ja $i_2: \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}_2$ on ominaisuus (*). Valitsemalla $Y = \tilde{\mathbb{Z}}_2$, $f = i_2$ saadaan (*)istä, että $\exists!$ G -kuvauks $\tilde{i}_2: \tilde{\mathbb{Z}}_1 \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}_2$ s.e.



kommutoi.

Valitsemalla $Y = \tilde{\mathbb{Z}}_1$, $f = i_1$ saadaan (*)istä, että $\exists!$ G -kuvauks $\tilde{i}_1: \tilde{\mathbb{Z}}_2 \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}_1$ s.e.



kommutoi.

Yhdistämällä nämä kaaviot kahdella tavalla, saadaan kommutoitavat kaaviot

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{i_1} & \tilde{X}_1 \\ & \searrow i_1 & \downarrow \tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2 \\ & & \tilde{X}_1 \end{array} \quad \text{ja} \quad \begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{i_2} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow i_2 & \downarrow \tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1 \\ & & \tilde{X}_2 \end{array}$$

Jos korvataan kuvaukset $\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2$ ja $\tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1$ identtisillä kuvauksilla, kaaviot kommutoivat edelleen. Koska funktio f ominaisuudessa (*) on yksikäsitteinen, on välttämättä

$$\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2 = \text{id}_{\tilde{X}_1} \quad \text{ja} \quad \tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1 = \text{id}_{\tilde{X}_2}.$$

Siis \tilde{i}_1 ja \tilde{i}_2 ovat G -homeomorfismeja, eli \tilde{X} on tässä mielessä yksikäsitteinen.

Lisäksi injektiot i_1 ja i_2 vastaavat toisiaan näiden G -homeomorfismien välityksellä, joten ne ovat tässä mielessä yksikäsitteiset.

□

Teoreema 5.5. (Transitiivisuus)

Olk. G top. ryhmä, $H, K \subset G$ in aliryhmiä ja $H \subset K$.

Jos \bar{X} on H -avaruus, niin funktio

$$f: G \times_K (K \times_H \bar{X}) \rightarrow G \times_H \bar{X} \\ [g, [k, x]] \mapsto [gk, x], \quad g \in G, k \in K, x \in \bar{X},$$

on G -homeomorfismi.

Tod. f on hyvin määritelty jatkava G -kuvaus (HT).

Määr. nyt

$$f': G \times_H \bar{X} \rightarrow G \times_K (K \times_H \bar{X}) \\ [g, x] \mapsto [g, [e, x]].$$

• f' hyvin määr.:

Jos $[g, x] = [g', x']$, niin $\exists h \in H$ s.e. $g' = gh^{-1}$ ja $x' = hx$, jolloin

$$\begin{aligned} f'([g', x']) &= f'([gh^{-1}, hx]) = [gh^{-1}, [e, hx]] \\ &= [gh^{-1}, [h, x]] = [gh^{-1}, h[e, x]] \\ &= [gh^{-1}h, [e, x]] = [g, [e, x]] = f'([g, x]). \end{aligned}$$

- f' jatkuva: Tark. kommutatiivaa kaaviota

$$\begin{array}{ccc}
 G \times \underline{X} & \xrightarrow{\tilde{f}'} & G \times K \times \underline{X} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \text{id} \times \pi_1 \\
 G \times_H \underline{X} & \xrightarrow{f'} & G \times_K (K \times_H \underline{X}) \\
 & & \downarrow \pi_2 \\
 & & G \times_K (K \times_H \underline{X})
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (g, x) & \longmapsto & (g, e, x) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (g, x) & \longmapsto & (g, [e, x]) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [g, x] & \longmapsto & [g, [e, x]]
 \end{array}$$

Funktiot π , \tilde{f}' , $\text{id} \times \pi_1$ ja π_2 ovat jatkuvia ja π on tebijektio, joten f' on jatkuva.

- $f \circ f' = \text{id}$: $f \circ f'([g, x]) = f([g, [e, x]]) = [ge, x] = [g, x]$.
- $f' \circ f = \text{id}$: $f' \circ f([g, [k, x]]) = f'([gk, x]) = [gk, [e, x]] = [g, k[e, x]] = [g, [k, x]]$

$\therefore f$ ja f' ovat G -homeomorfismeja. \square

Seuraavaksi määrittelemme viipaleen (eng. slice) käsitteen.

Määr. 5.6. Olk. \underline{X} G -avaruus ja $H \leq G$. \underline{X} :n osajoukko S on H -ydin (H -kernel), jos on olemassa G -kuvaus $f: GS \rightarrow G/H$

$$\text{s.e. } f^{-1}(eH) = S,$$

Jos lisäksi $GS \subset \underline{X}$, sanotaan, että S on H -viipale (H -slice) \underline{X} :ssä.

Jos $x \in \underline{X}$, niin viipaleella pisteessä x tarkoitetaan G_x -viipaletta \underline{X} :ssä, jolle sisältää pisteen x .

Teoreema 5.7. Olk. G Lie ryhmä ja \underline{X} täysin säännöllinen G -avaruus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

- (1) Jokaisella $x \in \underline{X}$, G_x on kompakti ja on olemassa viipale pisteessä x
- (2) \underline{X} on Cartan G -avaruus.

Tod. R.S. Palais: "On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups", Ann. of Math., 1961. \square

Huom. [Väisälä: Top. II, s. 142] Top. avaruus X on täysin säännöllinen, jos e on Hausdorff ja jostaista $a \in X$ ja jostaista a:n ympäristöä U kohti on olemassa sell. jatkuva kuvaus $f: X \rightarrow I$, että $f(a) = 1$ ja $f(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus U$. Pätee implikaatiot

Normaali \Rightarrow Täysin säänn. \Rightarrow Säännöllinen.

ol. X Hausdorff

Teoreema 5.8. Oletetaan, että G on Lie-ryhmä tai kompakti ryhmä.

Olk. H G :n suljettu aliryhmä ja X G -avaruus. Jos $f: X \rightarrow G/H$ on G -kuvaus, niin $S = f^{-1}(eH)$ on H -invariantti ja kuvaus

$$\varphi: G \times_H S \rightarrow X$$
$$[g, s] \mapsto gs$$

on G -homeomorfismi.

Tod. • $f^{-1}(eH)$ on H -invariantti:

Jos $x \in f^{-1}(eH)$ ja $h \in H$, niin

$$f(hx) = hf(x) = h \cdot eH = hH = eH, \text{ joten } hx \in f^{-1}(eH).$$

\uparrow f ekviv. \uparrow $x \in f^{-1}(eH)$

• φ hyvin määr.:

Jos $[g, s] = [g', s']$, niin $\exists h \in H$ s.e. $(gh^{-1}, hs) = (g', s')$

$$\text{ja } \varphi[g', s'] = \varphi[gh^{-1}, hs] = gh^{-1}hs = gs = \varphi[g, s].$$

• φ jatkuva, koska kaaviassa

$$\begin{array}{ccc} G \times S & \xrightarrow{\mathbb{E}} & X \\ \uparrow \downarrow & & \uparrow \\ G \times_H S & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array} \quad \left(\mathbb{E} = \text{toiminnan } G \times X \rightarrow X \text{ rajoittuma} \right)$$

\mathbb{E} on jatkuva ja π on tekijäkuvaus.

• φ G -ekvivariantti:

$$\varphi(g'[g, s]) = \varphi([g'g, s]) = (g'g)s = g'(gs) = g'\varphi([g, s]).$$

• φ surjektio:

olk. $x \in X$, olk. $gH = f(x) \in G/H$.

Tällöin $g^{-1}x \in S$, koska $f(g^{-1}x) = g^{-1}f(x) = g^{-1}gH = eH$.

Siis $[g, g^{-1}x] \in G \times_H S$ ja

$$\varphi([g, g^{-1}x]) = g(g^{-1}x) = x.$$

• φ injektio: olk. $\varphi[g, s] = \varphi[g', s']$, eli $gs = g's'$.

Nyt

$$gH = g f(s) = f(gs) = f(g's') = g' f(s') = g'H,$$

\uparrow $f(s) = eH$ \uparrow ekviv. \uparrow ekviv. \uparrow $f(s') = eH$

joten $h = g^{-1}g' \in H$. Siis $gs = g's' = ghs'$, joten $s = hs'$ ja

$$[g', s'] = [\underbrace{g'h^{-1}}_{=g}, \underbrace{hs'}_{=s}] = [g, s].$$

• φ^{-1} jatkuva:

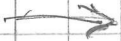
(1) G kompakti ryhmä:

Nyt toimintakuvauks on suljettu kuvaus, koska G on kompakti (Teoreema 2.10). Koska $S \in \mathbb{X}$, on $\mathbb{X}| : G \times S \rightarrow \mathbb{X}$ suljettu. Jos nyt $C \in G \times_H S$, saadaan kaaviosta (*)

$$\varphi(C) = \mathbb{X}|(\underbrace{\pi^{-1}C}_{\in G \times S}) \in \mathbb{X}.$$

Siis φ on suljettu kuvaus $\Rightarrow \varphi^{-1}$ on jatkuva.

6.11.13

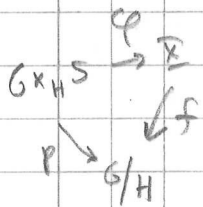


(2) G Lie'n ryhmä:

Tarvitsemme Lie'n ryhmistä seuraavaa lisätietoa:

Projektilla $q: G \rightarrow G/H$ on n.s. lokaali sektion, eli on olemassa eH :n ympäristö $U \subset G/H$:ssa ja jatkuva kuvaus $\sigma: U \rightarrow G$ s.e. $q \circ \sigma = \text{id}_U$, esim.

[Kawakubo: The theory of transformation groups, Th. 3.37].



Jos $x \in f^{-1}(U) \subset \mathbb{X}$, niin $(\sigma f(x))^{-1}x \in S$:

jos merk. $f(x) = gH \in G/H$ ja $\sigma f(x) = \bar{g} \in G$, on siis $\bar{g}H = gH$ eli $\bar{g}^{-1}g \in H$. Siis

$$f((\sigma f(x))^{-1}x) \underset{\text{equiv.}}{=} (\sigma f(x))^{-1}f(x) = \underbrace{\bar{g}^{-1}g}_{\in H}H = eH, \text{ eli väite ok.}$$

Merkitään $p: G \times_H S \rightarrow G/H$ projektio (Lause 5.2), ja

määritellään $\varphi^*: f^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(U)$ kaavalla

$$x \mapsto [\sigma f(x), (\sigma f(x))^{-1}x].$$

Selvästi φ^* on jatkuva.

Ei ole vaikea tarkistaa, että $\varphi|: p^{-1}U \rightarrow f^{-1}U$ ja φ^* ovat toistensa käänteiskuvauksia, joten $\varphi|$ on homeomorfismi.

Jos nyt $[g, s] \in G \times_H S$, niin $gp^{-1}U$ on $[g, s]$:n ympäristö $G \times_H S$:ssä ja $gf^{-1}U$ on gs :n ympäristö \mathbb{X} :ssä.

Nyt $\varphi|: gp^{-1}U \rightarrow gf^{-1}U$ on yhdiste homeomorfismeista

$$gp^{-1}U \xrightarrow{\varphi^*} p^{-1}U \xrightarrow{\varphi|} f^{-1}U \xrightarrow{\sigma} gf^{-1}U.$$

Tämä osoittaa, että φ on homeomorfismi. □

Teoreema 5.9, Olk. X G -avaruus, H G :n kompakti aliryhmä.

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- 1) S on H -ydin X :ssä
- 2) a) $S \in GS$
 b) S on H -invariantti
 c) $G(S|S) = H$
 d) S :llä on ympäristö $V \subset GS$:ssä, s.e. $\overline{G(V|V)}$ on kompakti.

Tod. 1) \Rightarrow 2): HT

2) \Rightarrow 1): Määr. $f: GS \rightarrow G/H$ kaavalla
 $gs \mapsto gH$.

- f on hyvin määritelty: Jos $gs = g's'$ ($g, g' \in G; s, s' \in S$), niin $s = g^{-1}g's'$, joten $g^{-1}g' \in G(S|S) \stackrel{!}{=} H$, joten $g' \in gH$ eli $g'H = gH$.
- f G -ekvivalentti: $f(\bar{g}(gs)) = f((\bar{g}g)s) = (\bar{g}g)H = \bar{g}(gH) = \bar{g}f(gs)$.
- f jatkuva:

Käytetään verkkoja (nets), kts. Teoreema 2.10 ja Huomautus 2.11.

Oletetaan, että on annettu verkot (g_α) G :ssä ja (s_α) S :ssä, s.e. $g_\alpha s_\alpha \rightarrow gs$. On aroitettava, että $f(g_\alpha s_\alpha) \rightarrow f(gs)$, eli että $g_\alpha H \rightarrow gH$ G/H :ssä.

Tapaus 1: $g=e$ eli $g_\alpha s_\alpha \rightarrow s \in S$.

Jos $g_\alpha H \not\rightarrow eH$, niin on olemassa eH :n ympäristö \tilde{U} s.e. löytyy mieliv. suuria α s.e. $g_\alpha H \notin \tilde{U}$. Nyt $U = \pi^{-1}(\tilde{U})$ on H :n ympäristö G :ssä ja löytyy mieliv. suuria α s.e. $g_\alpha \notin U$.

Muodostamalla näistä osaverkko, void. ol. että mikään (g_α) :in osaverkko ei suppene H :n pistettä kohti. (*)

Olkoon nyt V S :n ympäristö GS :ssä s.e. $\overline{G(V|V)}$ on kompakti. Koska $g_\alpha s_\alpha \rightarrow s \in S$, on $g_\alpha s_\alpha \in V$ ja siis $g_\alpha \in \overline{G(V|V)}$ tarpeeksi suurilla α . Koska $\overline{G(V|V)}$ on kompakti, voidaan olettaa, että $g_\alpha \rightarrow \bar{g} \in G$.

Koska nyt $g_\alpha s_\alpha \rightarrow s$, on $s_\alpha = g_\alpha^{-1}(g_\alpha s_\alpha) \rightarrow \bar{g}^{-1}s$.

Koska $s \in GS$, niin $\bar{g}^{-1}s \in S$, eli $\bar{g} \in G(S|S) \stackrel{!}{=} H$.

Siiis (g_α) :in osaverkko $\rightarrow \bar{g} \in H$, ristiriita (*)'in kanssa.

Tapaus 2: $g_\alpha s_\alpha \rightarrow gs$.

Nyt $g^{-1}g_\alpha s_\alpha \rightarrow s \in S$, joten Tapaus 1 $\Rightarrow g^{-1}g_\alpha H \rightarrow eH$, josta seuraa $g_\alpha H \rightarrow gH$.

□