# V Viipaleet G-avaruuksissa (engl. slices)

Olk. $G$ topologinen ryhmä ja $H \leq G$.
Jos $X$ on $H$-avaruus, konstruoimme $X$:stä $G$-avaruuden seuraavasti:
Tuloavaruudessa $G \times X$ määritellään $H$:n toiminta

$$h \cdot (g, x) = (gh^{-1}, hx). \qquad (*)$$

Tämän toiminnan rata-avaruutta $G \times X / H$ merkitään

$$G \times_H X,$$

merkitään lisäksi $\pi : G \times X \to G \times_H X$ rata-avaruusprojektio.
Alkion $(g, x)$ $H$-rataa merkitään $[g, x]$.
Määr. $G$:n toiminta

$$\tilde{\varphi} : G \times (G \times_H X) \to G \times_H X$$
$$(g', [g, x]) \mapsto [g'g, x]. \qquad (**)$$

Tämä on hyvin määr. jatkuva toiminta (HT).

$G$-avaruutta $G \times_H X$ sanotaan usein ($H$-avaruuden $X$) indusoiduksi $G$-avaruudeksi.

Määritellään sitten kuvaukset

$$i_e : X \to G \times X$$
$$x \mapsto (e, x)$$

ja

$$i = \pi \circ i_e : X \to G \times_H X$$
$$x \longmapsto [e, x].$$

Lause 5.1. Jos $H$ on kompakti, niin $i$ on $H$-ekvivariantti suljettu upotus.

Tod.
- $i$ on jatkuva: ok.
- $i$ on $H$-ekvivariantti:
$$i(hx) = [e, hx] \overset{(*)}{=} [eh, h^{-1}(hx)]$$
$$= [h, x] \overset{(**)}{=} h[e, x] = h\, i(x).$$
- $i$ injektio: Jos $i(x) = i(y)$, on siis $[e, x] = [e, y]$,
joten $(*) \Rightarrow \exists\, h \in H$ s.e. $(eh^{-1}, hx) = (e, y)$.
Tästä seuraa $eh^{-1} = e$ eli $h = e$ ja $x = hx = y$.
- $i$ suljettu kuvaus: $i_e$ on suljettu kuvaus. Samoin $\pi$ on suljettu Teoreeman 2.13. nojalla.
Siis $i$ on sulj. kuvaus.

□

**Lause 5.2.**

Projektio $G \times X \to G$ indusoi projektion
$$p: G \times_H X \to G/H$$
$$[g,x] \mapsto gH \qquad \text{(HT)}.$$
□

Indusoidulla G-avaruudella on seuraava universaaliominaisuus:

**Teoreema 5.3.** Jos $Y$ on G-avaruus ja $f: X \to Y$ H-ekvivariantti jatkuva kuvaus, niin on olemassa yksikäsitteinen G-kuvaus $\tilde{f}: G \times_H X \to Y$ s.e. kaavio

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & G \times_H X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad (*)$$

kommutoi.

**Tod.** Määr. $\tilde{f}$ kaavalla
$$\tilde{f}([g,x]) = gf(x), \quad g \in G,\ x \in X.$$

- $\tilde{f}$ hyvin määr.: jos $[g,x] = [g',x']$, on siis $(gh^{-1}, hx) = (g',x')$ jollakin $h \in H$. Nyt
$$\tilde{f}([g',x']) = \tilde{f}([gh^{-1}, hx]) = gh^{-1}f(hx)$$
$$\overset{f\ H\text{-ekviv.}}{=} gh^{-1}hf(x) = gf(x) = \tilde{f}([g,x]).$$

- kaavio kommutoi: $\tilde{f}(i(x)) = \tilde{f}([e,x]) = ef(x) = f(x)$ ok.

- $\tilde{f}$ on G-ekvivariantti:
$$\tilde{f}(g'[g,x]) = \tilde{f}([g'g,x]) = (g'g)f(x)$$
$$= g'(gf(x)) = g'\tilde{f}([g,x]).$$

- $\tilde{f}$ jatkuva: merk. $\Psi: G \times Y \to Y$ G:n toiminta Y:ssä. Saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "id \times f"] \arrow[d, "\pi"'] & G \times Y \arrow[d, "\Psi"] \\ G \times_H X \arrow[r, "\tilde{f}"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g,f(x)) \arrow[d, mapsto] \\ {[g,x]} \arrow[r, mapsto] & gf(x) \end{tikzcd}$$

Koska $id \times f$ ja $\Psi$ ovat jatkuvia ja $\pi$ on tekijäkuvaus, on $\tilde{f}$ jatkuva Lemman 1.18 nojalla.

- Yksikäsitteisyys:

  Jos $\tilde{f}' : G \times_H X \to Y$ on toinen jatkuva $G$-kuvaus, jolle $\tilde{f}' \circ i = f$, niin

  $$\tilde{f}'([g,x]) = \tilde{f}'(g[e,x]) \overset{\tilde{f}'\ G\text{-ekviv.}}{=} g\tilde{f}'([e,x]) = g\underbrace{\tilde{f}' i}_{=f}(x) = gf(x) = \tilde{f}([g,x]), \quad \forall g, x.$$

  Siis $\tilde{f}' = \tilde{f}$, mikä osoittaa yksikäsitteisyyden. $\square$

4.11.13 →

**Teoreema 5.4.** Jos $H$ on top. ryhmän $G$ aliryhmä ja $X$ on $H$-avaruus, niin $\exists$ yksikäsitteinen $G$-avaruus $\tilde{X}$ ja yksikäsitteinen injektiivinen $H$-kuvaus $i : X \to \tilde{X}$, jolla on Teoreeman 5.3 universaaliominaisuus $(*)$:

Jos $Y$ on $G$-avaruus ja $f : X \to Y$ on jatkuva $H$-kuvaus, niin $\exists$ yksikäsitt. $G$-kuvaus $\tilde{f}$ s.e. kaavio

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Tod. Olemassaolo seuraa ed. teoreemasta ($\tilde{X} = G \times_H X$).

Yksikäsitteisyys:

Ol., että kuvauksilla $i_1 : X \to \tilde{X}_1$ ja $i_2 : X \to \tilde{X}_2$ on ominaisuus $(*)$. Valitsemalla $Y = \tilde{X}_2$, $f = i_2$ saadaan $(*)$:stä, että $\exists!$ $G$-kuvaus $\tilde{i}_2 : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ s.e.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & \tilde{X}_1 \arrow[d, "\tilde{i}_2"] \\ & \tilde{X}_2 \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Valitsemalla $Y = \tilde{X}_1$, $f = i_1$ saadaan $(*)$:stä, että $\exists!$ $G$-kuvaus $\tilde{i}_1 : \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ s.e.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "i_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[d, "\tilde{i}_1"] \\ & \tilde{X}_1 \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Yhdistämällä nämä kaaviot kahdella tavalla, saadaan kommutoivat kaaviot

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & \tilde{\overline{X}}_1 \arrow[d, "\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2"] \\ & \tilde{\overline{X}}_1 \end{tikzcd} \quad \text{ja} \quad \begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "i_2"'] & \tilde{\overline{X}}_2 \arrow[d, "\tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1"] \\ & \tilde{\overline{X}}_2 \end{tikzcd} .$$

Jos korvataan kuvaukset $\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2$ ja $\tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1$ identtisillä kuvauksilla, kaaviot kommutoivat edelleen. Koska funktio $\tilde{f}$ ominaisuudessa $(*)$ on yksikäsitteinen, on välttämättä

$$\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2 = id_{\tilde{\overline{X}}_1} \quad \text{ja} \quad \tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1 = id_{\tilde{\overline{X}}_2} .$$

Siis $\tilde{i}_1$ ja $\tilde{i}_2$ ovat $G$-homeomorfismeja, eli $\tilde{\overline{X}}$ on tässä mielessä yksikäsitteinen.

Lisäksi injektiot $i_1$ ja $i_2$ vastaavat toisiaan näiden $G$-homeomorfismien välityksellä, joten ne ovat tässä mielessä yksikäsitteiset. $\square$

**Teoreema 5.5.** (Transitiivisuus)

Olk. $G$ top. ryhmä, $H, K$ $G$:n aliryhmiä ja $H \subset K$.
Jos $\overline{X}$ on $H$-avaruus, niin funktio

$$f : G \times_K (K \times_H \overline{X}) \longrightarrow G \times_H \overline{X}$$
$$[g, [k, x]] \longmapsto [gk, x] \quad , g \in G, k \in K, x \in \overline{X},$$

on $G$-homeomorfismi.

Tod. $f$ on hyvin määritelty jatkuva $G$-kuvaus (HT).

Määr. nyt

$$f' : G \times_H \overline{X} \longrightarrow G \times_K (K \times_H \overline{X})$$
$$[g, x] \longmapsto [g, [e, x]] .$$

- $f'$ hyvin määr.:

Jos $[g, x] = [g', x']$, niin $\exists\, h \in H$ s.e. $g' = gh^{-1}$ ja $x' = hx$, jolloin

$$\begin{aligned} f'([g', x']) &= f'([gh^{-1}, hx]) = [gh^{-1}, [e, hx]] \\ &= [gh^{-1}, [h, x]] = [gh^{-1}, h[e, x]] \\ &= [gh^{-1}h, [e, x]] = [g, [e, x]] = f'([g, x]) . \end{aligned}$$

• $f'$ jatkuva: Tark. kommutoivaa kaaviota

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[r, "\tilde{f}'"] \arrow[dd, "\pi"'] & G\times K\times X \arrow[d, "id\times\pi_1"] \\ & G\times(K\times_H X) \arrow[d, "\pi_2"] \\ G\times_H X \arrow[r, "f'"] & G\times_K(K\times_H X) \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} (g,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & (g,e,x) \arrow[d, mapsto] \\ & (g,[e,x]) \arrow[d, mapsto] \\ [g,x] \arrow[r, mapsto] & [g,[e,x]] \end{tikzcd}$$

Funktiot $\pi$, $\tilde{f}'$, $id\times\pi_1$ ja $\pi_2$ ovat jatkuvia ja $\pi$ on tekijäkuvaus, joten $f'$ on jatkuva.

• $f\circ f' = id$: $f\circ f'([g,x]) = f([g,[e,x]]) = [ge,x] = [g,x]$.
$f'\circ f = id$: $f'\circ f([g,[k,x]]) = f'([gk,x]) = [gk,[e,x]]$
$= [g, k[e,x]] = [g,[k,x]]$

$\therefore$ $f$ ja $f'$ ovat $G$-homeomorfismeja. □

Seuraavaksi määrittelemme viipaleen (engl. slice) käsitteen.

Määr. 5.6. Olk. $X$ $G$-avaruus ja $H\leq G$. $X$:n osajoukko $S$ on H-ydin ($H$-kernel), jos on olemassa $G$-kuvaus
$$f: GS \to G/H$$
s.e. $f^{-1}(eH) = S$.
Jos lisäksi $GS \circledcirc X$, sanotaan, että $S$ on $H$-viipale ($H$-slice) $X$:ssä.
Jos $x\in X$, niin viipaleella pisteessä $x$ tarkoitetaan $G_x$-viipaletta $X$:ssä, joka sisältää pisteen $x$.

Teoreema 5.7. Olk. $G$ Lien ryhmä ja $X$ täysin säännöllinen $G$-avaruus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
(1) Jokaisella $x\in X$, $G_x$ on kompakti ja on olemassa viipale pisteessä $x$
(2) $X$ on Cartan $G$-avaruus.

Tod. R.S. Palais: "On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups", Ann. of Math., 1961. □

14.11.16 →

Huom. [Väisälä: Top. II, s. 142] Top. avaruus $X$ on täysin säännöllinen, jos se on Hausdorff ja jokaista $a \in X$ ja jokaista $a$:n ympäristöä $U$ kohti on olemassa sell. jatkuva kuvaus $f : X \to I$, että $f(a) = 1$ ja $f(x) = 0 \ \forall x \in X \setminus U$. Pätee implikaatiot

Normaali $\Rightarrow$ Täysin säänn. $\Rightarrow$ säännöllinen.

ol. $X$ Hausdorff

**Teoreema 5.8.** Oletetaan, että $G$ on Lie-ryhmä tai kompakti ryhmä. Olk. $H$ $G$:n suljettu aliryhmä ja $X$ $G$-avaruus. Jos $f : X \to G/H$ on $G$-kuvaus, niin $S = f^{-1}(eH)$ on $H$-invariantti ja kuvaus

$$\varphi : G \times_H S \to X$$
$$[g, s] \mapsto gs$$

on $G$-homeomorfismi.

Tod. • $f^{-1}(eH)$ on $H$-invariantti:

Jos $x \in f^{-1}(eH)$ ja $h \in H$, niin

$$f(hx) \underset{f \text{ ekviv.}}{=} hf(x) \underset{x \in f^{-1}(eH)}{=} h \cdot eH = hH = eH,$$ joten $hx \in f^{-1}(eH)$.

• $\varphi$ hyvin määr.:

Jos $[g,s] = [g',s']$, niin $\exists h \in H$ s.e. $(gh^{-1}, hs) = (g', s')$ ja $\varphi[g',s'] = \varphi[gh^{-1}, hs] = gh^{-1}hs = gs = \varphi[g,s]$.

• $\varphi$ jatkuva, koska kaaviossa

$$(*) \quad \begin{tikzcd} G \times S \arrow[rd, "\Phi|"] \arrow[d, "\pi"'] & \\ G \times_H S \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

($\Phi|$ = toiminnan $G \times X \to X$ rajoittuma)

$\Phi|$ on jatkuva ja $\pi$ on tekijäkuvaus.

• $\varphi$ $G$-ekvivariantti:

$$\varphi(g'[g,s]) = \varphi([g'g, s]) = (g'g)s$$
$$= g'(gs) = g'\varphi([g,s]).$$

• $\varphi$ surjektio:

olk. $x \in X$, olk. $gH = f(x) \in G/H$.

Tällöin $g^{-1}x \in S$, koska $f(g^{-1}x) = g^{-1}f(x) = g^{-1}gH = eH$.

Siis $[g, g^{-1}x] \in G \times_H S$ ja

$$\varphi([g, g^{-1}x]) = g(g^{-1}x) = x.$$

• $\varphi$ injektio: olk. $\varphi[g,s] = \varphi[g',s']$, eli $gs = g's'$.

Nyt

$$gH \underset{f(s)=eH}{=} gf(s) \underset{\text{ekviv.}}{=} f(gs) = f(g's') \underset{\text{ekviv.}}{=} g'f(s') \underset{f(s')=eH}{=} g'H,$$

joten $h = g^{-1}g' \in H$. Siis $gs = g's' = ghs'$, joten $s = hs'$ ja

$$[g',s'] = [\underbrace{g'h^{-1}}_{=g}, \underbrace{hs'}_{=s}] = [g,s].$$

• $\varphi^{-1}$ jatkuva:

(1) $G$ kompakti ryhmä:

Nyt toimintakuvaus on suljettu kuvaus, koska $G$ on kompakti (Teoreema 2.10). Koska $S \Subset X$, on $\Phi| : G \times S \to X$ suljettu. Jos nyt $C \Subset G \times_H S$, saadaan kaaviosta (*)

$$\varphi(C) = \Phi|(\underbrace{\pi^{-1}C}_{\Subset G \times S}) \Subset X.$$

Siis $\varphi$ on suljettu kuvaus $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}$ on jatkuva.

6.11.13 $\longrightarrow$

(2) $G$ Lien ryhmä:

Tarvitsemme Lien ryhmistä seuraavaa lisätietoa:
Projektiolla $q : G \to G/H$ on n.s. lokaali sektio, eli on olemassa $eH$:n ympäristö $U$ $G/H$:ssa ja jatkuva kuvaus $\sigma : U \to G$ s.e. $q \circ \sigma = \mathrm{id}_U$, esim. [Kawakubo: The theory of transformation groups, Th. 3.37].

$$\begin{array}{ccc} G\times_H S & \xrightarrow{\varphi} & X \\ & {\scriptstyle p}\searrow & \swarrow{\scriptstyle f} \\ & G/H & \end{array}$$

Jos $x \in f^{-1}(U) \subset X$, niin $(\sigma f(x))^{-1}x \in S$:

jos merk. $f(x) = gH \in G/H$ ja $\sigma f(x) = \bar{g} \in G$, on siis $\bar{g}H = gH$ eli $\bar{g}^{-1}g \in H$. Siis

$$f((\sigma f(x))^{-1}x) \underset{\text{ekviv.}}{=} (\sigma f(x))^{-1} f(x) = \underbrace{\bar{g}^{-1}g}_{\in H} H = eH,$$ eli väite ok.

Merkitään $p : G \times_H S \to G/H$ projektio (Lause 5.2), ja määritellään $\varphi^* : f^{-1}(U) \longrightarrow p^{-1}(U)$ kaavalla

$$x \longmapsto [\sigma f(x), (\sigma f(x))^{-1}x].$$

Selvästi $\varphi^*$ on jatkuva.
Ei ole vaikea tarkistaa, että $\varphi| : p^{-1}U \to f^{-1}U$ ja $\varphi^*$ ovat toistensa käänteiskuvauksia, joten $\varphi|$ on homeomorfismi.

Jos nyt $[g,s] \in G \times_H S$, niin $gp^{-1}U$ on $[g,s]$:n ympäristö $G \times_H S$:ssä ja $gf^{-1}U$ on $gs$:n ympäristö $X$:ssä.
Nyt $\varphi| : gp^{-1}U \longrightarrow gf^{-1}U$ on yhdiste homeomorfismeista

$$gp^{-1}U \xrightarrow{g^{-1}\cdot} p^{-1}U \xrightarrow{\varphi|} f^{-1}U \xrightarrow{g\cdot} gf^{-1}U.$$

Tämä osoittaa, että $\varphi$ on homeomorfismi. $\square$

**Teoreema 5.9.** Olk. $X$ $G$-avaruus ($G$ lok. kompakti), $H$ $G$:n kompakti aliryhmä. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1) $S$ on $H$-ydin $X$:ssä
2) a) $S \Subset GS$
   b) $S$ on $H$-invariantti
   c) $G(S|S) = H$
   d) $S$:llä on ympäristö $V$ $GS$:ssä, s.e. $\overline{G(V|V)}$ on kompakti.

**Tod.** 1) $\Rightarrow$ 2): HT

2) $\Rightarrow$ 1): Määr. $f: GS \to G/H$ kaavalla
$$gs \mapsto gH.$$

- $f$ on hyvin määritelty: Jos $gs = g's'$ $(g, g' \in G;\ s, s' \in S)$, niin $s = g^{-1}g's'$, joten $g^{-1}g' \in G(S|S) \overset{c)}{=} H$, joten $g' \in gH$ eli $g'H = gH$.
- $f$ $G$-ekvivariantti: $f(\bar{g}(gs)) = f((\bar{g}g)s) = (\bar{g}g)H = \bar{g}(gH) = \bar{g}\,f(gs)$.
- $f$ jatkuva:

Käytetään verkkoja (nets), kts. Teoreema 2.10 ja Huomautus 2.11. Oletetaan, että on annettu verkot $(g_\alpha)$ $G$:ssä ja $(s_\alpha)$ $S$:ssä, s.e. $g_\alpha s_\alpha \to gs$. On osoitettava, että $f(g_\alpha s_\alpha) \to f(gs)$, eli että $g_\alpha H \to gH$ $G/H$:ssa.

Tapaus 1: $g = e$ eli $g_\alpha s_\alpha \to s \in S$.

Jos $g_\alpha H \not\to eH$, niin on olemassa $eH$:n ympäristö $\tilde{U}$ s.e. löytyy mieliv. suuria $\alpha$ s.e. $g_\alpha H \notin \tilde{U}$. Nyt $U = \pi^{-1}(\tilde{U})$ on $H$:n ympäristö $G$:ssä ja löytyy mieliv. suuria $\alpha$ s.e. $g_\alpha \notin U$. Muodostamalla näistä osaverkko, void. ol. että mikään $(g_\alpha)$:n osaverkko ei suppene $H$:n pistettä kohti. $\Big\}\ (*)$

Olkoon nyt $V$ $S$:n ympäristö $GS$:ssä s.e. $\overline{G(V|V)}$ on kompakti. Koska $g_\alpha s_\alpha \to s \in S$, on $g_\alpha s_\alpha \in V$ ja siis $g_\alpha \in \overline{G(V|V)}$ tarpeeksi suurilla $\alpha$. Koska $\overline{G(V|V)}$ on kompakti, voidaan olettaa, että $g_\alpha \to \bar{g} \in G$.
Koska nyt $g_\alpha s_\alpha \to s$, on $s_\alpha = g_\alpha^{-1}(g_\alpha s_\alpha) \to \bar{g}^{-1}s$.
Koska $S \Subset GS$, niin $\bar{g}^{-1}s \in S$, eli $\bar{g} \in G(S|S) \overset{c)}{=} H$.
Siis $(g_\alpha)$:n osaverkko $\to \bar{g} \in H$, ristiriita $(*)$:n kanssa.

Tapaus 2: $g_\alpha s_\alpha \to gs$.

Nyt $g^{-1}g_\alpha s_\alpha \to s \in S$, joten Tapaus 1 $\Rightarrow$ $g^{-1}g_\alpha H \to eH$, josta seuraa $g_\alpha H \to gH$.

$\square$