

IV Haarin integraali kompakteille ryhmille

olk. G kompakti topologinen ryhmä

Merk.

$$C(G, \mathbb{R}) = \{ f: G \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}.$$

Tunnetusti $C(G, \mathbb{R})$ on \mathbb{R} -kertoiminen vektoriarvaruus,
kun laskutoimitukset määritellään pisteittäin:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(g) &= f_1(g) + f_2(g) & , & \quad f_1, f_2 \in C(G, \mathbb{R}), g \in G \\ (af)(g) &= a f(g) & , & \quad f \in C(G, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R}, g \in G, \end{aligned}$$

kts. esim. [välsälä: Topologia I, s. 15].

olk. $h \in G$, Määr.

$$R_h: C(G, \mathbb{R}) \rightarrow C(G, \mathbb{R}) \\ f \longmapsto R_h f,$$

missä $R_h f(g) = f(gh)$.

Vastavuoriksi $L_h: C(G, \mathbb{R}) \rightarrow C(G, \mathbb{R})$, $L_h f(g) = f(hg)$

(Esim. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $R_x f(x) = f(x+x) = L_x f(x)$)

Huom. R_h on lineaarinen isomorfismi $C(G, \mathbb{R}) \rightarrow C(G, \mathbb{R})$

ja $R_{h'} \circ R_h = R_{h'h}$ $\forall h', h \in G$.

Samoin L_h on lin. isomorfismi ja $L_{h'} \circ L_h = L_{h'h}$ $\forall h', h \in G$.

(HT)

Teoreema 4.1. Olk. G kompakti topologinen ryhmä.

On olemassa yksikäsitteinen funktio

$$I: C(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

jolla on seuraavat ominaisuudet:

(a) $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$

(b) $I(cf) = c I(f)$ ($c \in \mathbb{R}$)

(c) Jos $f \in C(G, \mathbb{R})$ ja $f(g) \geq 0 \forall g$, niin $I(f) \geq 0$

(d) $I(\mathbb{1}) = 1$, missä $\mathbb{1}: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{1}(g) = 1 \forall g$

(e) $I(R_h f) = I(f) = I(L_h f)$ ($\forall h \in G$)

Funktio I on G :n Haarin integraali.

Ominaisuuksien (a) ja (b) mukaan I on (vektoriavaruksien välillä) lineaarinen lauvus. Ominaisuus (c) on luonnollinen integraalin ominaisuus. (d) on normalisointi, jota tarvitaan funktion I yleisistäiteisyyteen (Nimittäin, jos $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ $J: C(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $J(f) = a \cdot I(f)$, toteuttaa kaikki muut ominaisuudet, paitsi (d). Myös valciafunktio toteuttaa muut paitsi (d):in). Ominaisuus (e) tarkoittaa, että integraali on translaatioiden suhteen invariantti.

Todistus on melko pitkä, emme käy sitä yksityiskohtaisesti läpi; kts. esim. [L. S. Pontryagin: Topological groups, 2. painos, 1966; section 29, s. 192-201]. Mielivaltaiselle lokaalisti kompaktille separoitavalle topologiselle ryhmälle integraalin konstruoi Haar (1933). Seuraavana vuonna von Neumann esitti yleisintentisemmän konstruktion kompakteille ryhmille.

Yleensä merkittään $I(f) = \int f(g) dg$ tai vielä lyhyemmin $\int f(g) dg$. Tätä merkintää käyttäen ehto (e) saa muodon

$$\int f(gh) dg = \int f(g) dg = \int f(hg) dg.$$

Helppoja seurauksia ominaisuuksista (a)-(e):

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2)(g) dg = c_1 \int f_1(g) dg + c_2 \int f_2(g) dg.$$

$$\int (f_1 - f_2)(g) dg = \int f_1(g) dg - \int f_2(g) dg.$$

Jos $f_1 \leq f_2$ (eli $f_1(g) \leq f_2(g) \forall g$), niin $\int f_1(g) dg \leq \int f_2(g) dg$.

Jos $m \leq f(g) \leq M \forall g$ ($m, M \in \mathbb{R}$), niin $m \leq \int f(g) dg \leq M$.

Jos $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin myös funktio

$$|f|: G \rightarrow \mathbb{R},$$

$|f|(g) = |f(g)|$, on jatkuva, ja

$$\left| \int f(g) dg \right| \leq \underbrace{\int |f|(g) dg}_{= \int |f(g)| dg}. \quad (HT)$$

Jos merk. $M = \max \{ |f(g)| \mid g \in G \}$,
niin

$$\left| \int f(g) dg \right| \leq \int |f(g)| dg \leq M.$$

Lause 4.2. Olk. $f \in C(G, \mathbb{R})$, $f(g) \geq 0 \forall g$ ja $f(g) > 0$ jollakin g .

Tällöin

$$\int f(g) dg > 0.$$

To d. Merk. $U = f^{-1}(]0, \infty[) \subseteq G$, $U \neq \emptyset$.

Joukot $\{h_i U\}_{i=1}^n$ muodostavat G :n avoimen peitteen, josta (G komp.)

$\exists h_1, \dots, h_n \in G$ s.e. $h_1 U \cup h_2 U \cup \dots \cup h_n U = G$.

Nyt funktio $L_{h_i} f$ on positiivinen joukossa $h_i U$ ja ei-negatiivinen kaikkialla, sillä jos $h_i g \in h_i U$ ($g \in U$), niin

$$(L_{h_i} f)(h_i g) = f(h_i^{-1} h_i g) = f(g) > 0 \quad (\text{koska } g \in U),$$

ja $\forall g' \in G$ on $(L_{h_i} f)(g') = f(h_i^{-1} g') \geq 0$.

Siis funktio

$$F = \sum_{i=1}^n L_{h_i} f : G \rightarrow \mathbb{R}$$

on positiivinen kolco G :ssä (jokainen x kuuluu johonkin joukosta $h_i U$).

Koska F on jatkuva ja G kompakti, F saa pienimmän arvonsa (joka siis on > 0), eli $\exists c > 0$ s.e.

$$F(g) \geq c \quad \forall g \in G.$$

Siis

$$\int F(g) dg \geq c.$$

Toisaalta

$$\int F(g) dg = \int \left(\sum_{i=1}^n L_{h_i} f \right) (g) dg$$

$$\stackrel{(a)}{=} \sum_{i=1}^n \int (L_{h_i} f)(g) dg$$

$$\stackrel{(e)}{=} \sum_{i=1}^n \int f(g) dg = n \int f(g) dg,$$

joten $n \int f(g) dg \geq c$ ja $\int f(g) dg \geq \frac{c}{n} > 0$. □

Käytetään merkintää $f \geq h$, jos $f(g) \geq h(g) \forall g \in G$ ja merkintää $f > h$, jos $f \geq h$ ja $f \neq h$, eli $f(g) \geq h(g) \forall g$ ja $\exists g$ s.e. $f(g) > h(g)$.

Korollari 4.3. Jos $f_1, f_2 \in C(G, \mathbb{R})$ ja $f_1 < f_2$, niin

68

$$\int f_1(g) dg < \int f_2(g) dg.$$

Tod. Koska $f_1 < f_2$, on $(f_2 - f_1)(g) \geq 0 \forall g$ ja $\exists g$ s.e. $(f_2 - f_1)(g) > 0$,
joten 4.2. \Rightarrow

$$\int (f_2 - f_1)(g) dg > 0.$$

$$\Rightarrow \int f_2(g) dg - \int f_1(g) dg > 0 \Rightarrow \int f_1(g) dg < \int f_2(g) dg. \quad \square$$

Korollari 4.4. Jos $f \in C(G, \mathbb{R})$ ja $m < f(g) < M \forall g \in G$, niin

$$m < \int f(g) dg < M.$$

Tod. Sovelletaan edellistä korollaria vakiofunktioihin \underline{m} ja \underline{M}
(ja muistetaan, että $\int \underline{m}(g) dg = \int m \cdot \underline{1}(g) dg = m \cdot \int \underline{1}(g) dg = m \cdot 1 = m$
ja $\int \underline{M}(g) dg = \dots = M$.) \square

Korollari 4.5. Jos $f \in C(G, \mathbb{R})$ ja $|f(g)| < M \forall g \in G$,
niin

$$\left| \int f(g) dg \right| \leq \int |f(g)| dg < M. \quad \square$$

Olk. G kompakti top. ryhmä ja \mathbb{X} top. avaruus, ja
 $f: G \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

jatkuva funktio.

Kiinteällä $x \in \mathbb{X}$ saadaan jatkuva funktio $f_x: G \rightarrow \mathbb{R}$ ja
voidaan määritellä

$$F(x) = \int f_x(g) dg = \int f(g, x) dg.$$

Saadaan funktio

$$F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Teoreema 4.6. Olk. G kompakti top. ryhmä ja $f: G \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio (\bar{X} top. avaruus), Tällöin funktio

$$F: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = \int f(g, x) dg$$

on jatkuva.

Tod. Olk. $x_0 \in \bar{X}$. Osoitetaan, että F on jatkuva x_0 :ssa.
olk. $\varepsilon > 0$.

Tarkastellaan funktiota $\varphi: G \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g, x) \mapsto |f(g, x) - f(g, x_0)|.$$

Huom. $|f(g, x) - f(g, x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow (g, x) \in \underbrace{\varphi^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])}_{\text{merk. } U} \subseteq G \times \bar{X}$.

Koska $(g, x_0) \in U \forall g \in G$, niin

U on joukon $G \times \{x_0\}$ ympäristö $G \times \bar{X}$:ssä.

Koska G on kompakti, löytyy Lemman 3.9 nojalla pisteen x_0 ympäristö V s.e. $G \times V \subseteq U$, eli

$$|f(g, x) - f(g, x_0)| < \varepsilon \quad \forall g \in G, x \in V.$$

Jos nyt $x \in V$, niin

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int f(g, x) dg - \int f(g, x_0) dg \right|$$

$$= \left| \int f(g, x) - f(g, x_0) dg \right|$$

$$\leq \int \underbrace{|f(g, x) - f(g, x_0)|}_{< \varepsilon \forall g} dg \stackrel{4.4.}{< \varepsilon}.$$

Siis F on jatkuva pisteessä x_0 . \square

14.10.13

Tarkastellaan sitten kahta kompaktia top. ryhmää G, H , ja tuloa $G \times H$.

Koska $G \times H$ on myös kompakti top. ryhmä, on Teoreeman 4.9 nojalla olemassa Haarin integraali $I_{G \times H}$.

olk. $f: G \times H \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva.

Jokaisella kiinteällä $h \in H$ voidaan määrittellä

$$K(h) = \int_G f(g, h) dg$$

ja Teoreeman 4.6 nojalla saadaan jatkuva funktio

$$K: H \rightarrow \mathbb{R},$$

Siis voidaan muodostaa integraali

$$\int_H K(h) dh = \int_H \left(\int_G f(g, h) dg \right) dh.$$

Samaoin jokaisella kiinteällä $g \in G$ voidaan määrittellä

$$L(g) = \int f(g, h) dh$$

ja saadaan jatkuva funktio $L: G \rightarrow \mathbb{R}$.

Siiis voidaan muodostaa

$$\int_G L(g) dg = \int_G \left(\int_H f(g, h) dh \right) dg.$$

Teoreema 4.7. Olk. G ja H kompakteja top. ryhmiä, ja $f: G \times H \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva.

Tällöin

$$\underbrace{I_{G \times H}(f)}_{(1)} = \int_H \left(\int_G f(g, h) dg \right) dh = \int_G \left(\int_H f(g, h) dh \right) dg. \quad (2) \quad (3)$$

Tod.

Osoitamme, että (1) = (2) osoittamalla, että (2) toteuttaa Haarin integraalin ominaisuudet (a) - (e) ryhmälle $G \times H$.

Väite seuraa sitten integraalin yksikäsitteisyydestä.

Merk. $I^*(f) = \int_H \left(\int_G f(g, h) dg \right) dh \quad \left(= \int_H k(h) dh \right)$

(a) olk. $f_1, f_2 \in C(G \times H, \mathbb{R})$. Tällöin

$$\begin{aligned} I^*(f_1 + f_2) &= \int_H \left(\int_G (f_1 + f_2)(g, h) dg \right) dh \\ &= \int_H \left(\int_G f_1(g, h) + f_2(g, h) dg \right) dh \\ &= \int_H \left(\int_G f_1(g, h) dg + \int_G f_2(g, h) dg \right) dh \\ &= \int_H k_1(h) + k_2(h) dh \\ &= \int_H k_1(h) dh + \int_H k_2(h) dh = I^*(f_1) + I^*(f_2). \end{aligned}$$

(b) Vastaavasti

(c) Selvä

(d) Selvä

(e) olk. $(g_0, h_0) \in G \times H$, Tällöin

$$\begin{aligned} I^*(R_{(g_0, h_0)} f) &= \int_H \left(\int_G R_{(g_0, h_0)} f(g, h) dg \right) dh \\ &= \int_H \left(\int_G f(gg_0, hh_0) dg \right) dh \stackrel{(e)}{=} \int_H \left(\int_G f(g, hh_0) dg \right) dh \\ &= \int_H k(hh_0) dh \stackrel{(e)}{=} \int_H k(h) dh = I^*(f). \end{aligned}$$

Vastaavasti $I^*(L_{(g_0, h_0)} f) = I^*(f)$.

Siis Haarin integraalin yksikäsitteisyyden nojalla

$$I^*(f) = I_{G \times H}(f) \quad \forall f \in C(G \times H, \mathbb{R}).$$

(77)

Vastaavasti osoitetaan, että (1) = (3).

□

Tarkastellaan seuraavaksi vektoriarvoisia kuvauksia $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$,
(G kompakti top. ryhmä). Siis f on muotoa $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Jokainen koordinaattifunktio $f_i = \text{pr}_i \circ f: G \rightarrow \mathbb{R}$
on jatkuva reaaliarvoinen funktio, ja siis on olemassa

$$\int_G f_i(g) dg, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Määr. f in Haarin integraali

$$\int_G f(g) dg = \left(\int_G f_1(g) dg, \dots, \int_G f_n(g) dg \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Laure 4.8. Olk. $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ ja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineaarikuvauk.

Tällöin $T \circ f: G \rightarrow \mathbb{R}^k$ ja

$$\int (T \circ f)(g) dg = T \left(\int f(g) dg \right) \in \mathbb{R}^k.$$

Tod. Olk. $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, T in matriisi (tavall. kantojen suhteen).

Siis $T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, missä $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$.

$$\text{Nyt } T \left(\int f(g) dg \right) = T \left(\int f_1(g) dg, \dots, \int f_n(g) dg \right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \int f_j(g) dg, \dots, \sum_{j=1}^n a_{kj} \int f_j(g) dg \right)$$

$$= \left(\int \sum_{j=1}^n a_{1j} f_j(g) dg, \dots, \int \sum_{j=1}^n a_{kj} f_j(g) dg \right)$$

$$= \left(\int (T \circ f)_1(g) dg, \dots, \int (T \circ f)_k(g) dg \right)$$

$$= \int (T \circ f)(g) dg.$$

□

$$(T \circ f)(g) = T(f_1(g), \dots, f_n(g))$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} f_j(g), \dots, \sum_{j=1}^n a_{kj} f_j(g) \right)$$

Olk. $A: V^n \rightarrow W^m$ lineaarikuvaus, missä V^n, W^m ovat äärellisulotteisia vektoriavaruksia. Olk. $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ kanta V^n :lle ja $\mathcal{W} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ kanta W^m :lle.

Merk.

$$(*) \quad A(\bar{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{w}_i, \quad 1 \leq j \leq n$$

($A(\bar{v}_j) \in W$, joten koska $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ on kanta, niin löytyy yksikäsitteiset $a_{ij} \in \mathbb{R}$ s.e. (*) pätee).

Lineaarikuvausten A matriisi kantojen \mathcal{V} ja \mathcal{W} suhteen on siis $(m \times n)$ -matriisi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Olk. $B: W^m \rightarrow U^p$ toinen lineaarikuvaus ja $\mathcal{U} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p\}$ U^p :n kanta. Tunnetusti lin. kuvauksen $B \circ A: V^n \rightarrow U^p$ matriisi kantojen \mathcal{V} ja \mathcal{U} suhteen saadaan matriisikertolaskulla

$$(**) \quad [B \circ A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = [B]_{\mathcal{U}, \mathcal{W}} \cdot [A]_{\mathcal{W}, \mathcal{V}}.$$

Ol. nyt, että $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ ja $\mathcal{V}' = \{\bar{v}'_1, \dots, \bar{v}'_n\}$ ovat V^n :n kantoja. Kuvauksen $\text{Id}: V^n \rightarrow V^n$ matriisi näiden kantojen suhteen merkitään

$$[\mathcal{V}' | \mathcal{V}] = [\text{Id}]_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = [a_{ij}],$$

missä alkio a_{ij} toteuttaa $\bar{v}_j = \text{Id}(\bar{v}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{v}'_i$, kuten kaavassa (*).

Tark. sitten matriisia $[\mathcal{V} | \mathcal{V}'] = [\text{Id}]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}'}$:

Kaavan (**) nojalla saadaan

$$[\text{Id}]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}'} \cdot [\text{Id}]_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = [\text{Id} \circ \text{Id}]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$[\text{Id}]_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \cdot [\text{Id}]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}'} = [\text{Id} \circ \text{Id}]_{\mathcal{V}', \mathcal{V}'} = I_n,$$

joten $[\text{Id}]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}'} = [\text{Id}]_{\mathcal{V}', \mathcal{V}}^{-1}$, toisin merkittävä $[\mathcal{V} | \mathcal{V}'] = [\mathcal{V}' | \mathcal{V}]^{-1}$.

Tark. taas lineaarikuvausta $A: V^n \rightarrow W^m$.

Olk. $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ ja $\mathcal{V}' = \{\bar{v}'_1, \dots, \bar{v}'_n\}$ kantoja V^n :lle ja
 $\mathcal{W} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ ja $\mathcal{W}' = \{\bar{w}'_1, \dots, \bar{w}'_m\}$ kantoja W^m :lle.

Tällöin $(**)$:in nojalla on

$$[A]_{\mathcal{W}', \mathcal{V}'} = [Id_{W^m}]_{\mathcal{W}', \mathcal{W}} \cdot [A]_{\mathcal{W}, \mathcal{V}} \cdot [Id_{V^n}]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}'}$$

$$\text{eli } [A]_{\mathcal{W}', \mathcal{V}'} = [\mathcal{W}' | \mathcal{W}] \cdot [A]_{\mathcal{W}, \mathcal{V}} \cdot [\mathcal{V} | \mathcal{V}']$$

$$\text{eli } [A]_{\mathcal{W}', \mathcal{V}'} = [\mathcal{W}' | \mathcal{W}] \cdot [A]_{\mathcal{W}, \mathcal{V}} \cdot [\mathcal{V}' | \mathcal{V}]^{-1}.$$

Olk. $A: V^n \rightarrow V^n$ lin. isomorfismi. Tällöin

$$[A^{-1}]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \cdot [A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = [A^{-1} \circ A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = I_n$$

$$\text{ja } [A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \cdot [A^{-1}]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = I_n,$$

joten $[A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}$ on kääntyvä matriisi ja $[A^{-1}]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = [A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}^{-1}$.

Siis $[A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \in GL(n, \mathbb{R})$.

Jos merkitään $GL(V^n) =$ kaikkien lineaaristen isomorfismien $V^n \rightarrow V^n$ muodostama ryhmä, ja \mathcal{V} on V^n :n kanta, niin saadaan bijektio

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{V}} : GL(V^n) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto [A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \end{aligned}$$

Koska $[B \circ A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = [B]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \cdot [A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}$, on $\eta_{\mathcal{V}}$ homomorfismi, ja siis ryhmien välinen isomorfismi.

Joukkoon $GL(V^n)$ voidaan myös määrittellä topologia s.e. $\eta_{\mathcal{V}}$ tulee olemaan homeomorfismi, ja $GL(V^n)$ on tällöin topologinen ryhmä.

(Topologia on kannan \mathcal{V} valinnasta riippumaton (HT))

Oletetaan nyt, että vektoriavaruudessa V^n on määritelty sisätulo $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Määr. 4.9. Sanomme, että lineaarinen isomorfismi $A: (V^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

on ortogonaalinen kuvaus, jos $\langle A\bar{x}, A\bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V^n$.

Huom. Sisätuloavaruudelle $(V^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on aina olemassa ortonormaali kanta (Gram-Schmidt ortogonalisointi), eli kanta $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, jolle

$$\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Lause 4.10. Ol. $A: (V^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on ortogonaalinen kuvaus, ja $\mathcal{W} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ on ortonormaali kanta V^n :lle. Tällöin $[A]_{\mathcal{W}, \mathcal{W}} \in O(n)$.

Tod.

Nyt siis

$$(*) \quad \langle A\bar{v}_i, A\bar{v}_j \rangle = \langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

↑ ortog. kuvaus ↑ orton. kanta

Huomataan ensin, että jos $\bar{x}, \bar{y} \in V^n$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{W}}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{W}}$.

$$(**) \quad \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \bar{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j \bar{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left\langle \bar{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j \bar{v}_j \right\rangle$$

↑ matriisi-tulo

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = [\bar{x}]_{\mathcal{W}} \cdot [\bar{y}]_{\mathcal{W}} = [\bar{x}]_{\mathcal{W}}^T \cdot [\bar{y}]_{\mathcal{W}}$$

↑ pistetulo

\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n vektorin $A\bar{v}_i$ koordinaatit kannassa \mathcal{W}

$$\text{Nyt } \langle A\bar{v}_i, A\bar{v}_j \rangle = ([A]_{\mathcal{W}, \mathcal{W}} \cdot \bar{e}_i)^T \cdot ([A]_{\mathcal{W}, \mathcal{W}} \cdot \bar{e}_j)$$

↑ vektorin $A\bar{v}_j$ koord. kannassa \mathcal{W}

$$= \bar{e}_i^T [A]_{\mathcal{W}, \mathcal{W}}^T [A]_{\mathcal{W}, \mathcal{W}} \bar{e}_j = \delta_{ij}$$

Nyt

$$\delta_{ij} = \bar{e}_i^T [A]_{\mathcal{W}, \mathcal{W}}^T [A]_{\mathcal{W}, \mathcal{W}} \bar{e}_j = [0 \dots 1 \dots 0] \begin{matrix} A^T A \\ \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} j$$
$$= [0 \dots 1 \dots 0] \begin{bmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{ij} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{bmatrix} = s_{ij}$$

Siis $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I^n$, eli $A \in O(n)$.

16.10.13

□

Määr. 4.11. Olk. G topologinen ryhmä. G :n lineaarinen esitys on jatkava homomorfismi $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$.

Sanomme, että kaksi lin. esitystä $\varphi_1, \varphi_2: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ovat ekvivalentit, jos $\exists C \in GL(n, \mathbb{R})$ s.e.

$$\varphi_2(g) = C \varphi_1(g) C^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

Huom. Jos $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ on lin. esitys, niin voidaan määritellä G :n toiminta \mathbb{R}^n :ssä $(g, \bar{x}) \mapsto \varphi(g)\bar{x}$.

Tavoitteena on osoittaa, että kompaktin ryhmän esitys $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ on ekvivalentti ortogonaalisen esityksen $\varphi': G \rightarrow O(n)$ kanssa.

Ol., että $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ on G :n lin. esitys. Jokaisella $g \in G$, olk. $\mathbb{F}(g): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

se lin. isomorfismi, jolle $[\mathbb{F}(g)]_{e,e} = \varphi(g)$ ($e = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ tavall. kanta).

Saadaan kuvaukset $\mathbb{F}: G \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$, ja

$$\eta_e \circ \mathbb{F} = \varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R}),$$

missä $\eta_e: GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto [A]_{e,e}$, on topologisten ryhmien välinen isomorfismi.

Vastaavasti $\mathbb{F} = \eta_e^{-1} \circ \varphi: G \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ on ^{myös} jatkava homomorfismi.

Oletetaan, että olemme löytäneet \mathbb{R}^n :lle sisätulon \langle, \rangle , s.e. $\mathbb{F}(g): (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$

on ortogonaalinen lineaarikuvaukset $\forall g \in G$.

Gram-Schmidtin menetelmällä voimme löytää $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$:lle ortonormaalin kannan $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$.

Lauseen 4.10 nojalla $[\mathbb{F}(g)]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \in O(n) \quad \forall g \in G$.

Olk. $\varphi(g) = [\Phi(g)]_{r,r} = \gamma_{rr}(\Phi(g)) = (\gamma_r \circ \Phi)(g)$, $g \in G$. (76)

Nyt

$$\varphi: G \rightarrow \mathcal{O}(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$$

on jatkuva homomorfismi, eli G :n lineaarinen esitys, koska $\varphi: G \rightarrow \mathcal{O}(n)$, sanomme, että φ on G :n ortogonaalinen esitys.

Siis

$$[\Phi(g)]_{e,e} = [e|_r] [\Phi(g)]_{r,r} [e|_r]^T \quad \forall g \in G.$$

Jos merk. $C = [e|_r] \in GL(n, \mathbb{R})$, saadaan siis

$$\varphi(g) = C \varphi(g) C^{-1} \quad \forall g \in G.$$

Siis esitykset φ ja φ ovat ekvivalentit, eli φ on ekvivalentti ortogonaalisen esityksen kanssa.

Olemme siis osittaneet

Lause 4.12. Olk. G top. ryhmä ja $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ G :n lin. esitys.

Olk. $\Phi: G \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ määritelty kaavalla $[\Phi(g)]_{e,e} = \varphi(g)$, $g \in G$.

Oletetaan, että on olemassa sisätulo \langle, \rangle \mathbb{R}^n :lle s.e.

$\Phi(g): (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ on ortogonaalinen lin. kuvaus $\forall g \in G$.

Tällöin $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ on ekvivalentti ortogonaalisen esityksen kanssa.

□

Teoreema 4.13. Jokainen kompaktin top. ryhmän esitys on ekvivalentti ortogonaalisen esityksen kanssa.

Tod. Olk. G komp. top. ryhmä ja $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ lin. esitys.

Kuten aiemmin, määr. $\Phi: G \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ kaavalla $[\Phi(g)]_{e,e} = \varphi(g)$, jolloin $\Phi = \eta_e^{-1} \circ \varphi: G \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ on jatkuva homomorfismi.

Edellisen lauseen nojalla riittää osoittaa, että \exists \mathbb{R}^n :n sisätulo \langle, \rangle s.e. $\Phi(g): (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ on ortogonaalinen $\forall g \in G$.
Konstruoidaan tällainen sisätulo.

Olk. \bullet \mathbb{R}^n :n tavallinen sisätulo (pistetulo), eli

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Siiis \cdot on bilineaarinen, symmetrinen ja positiivisesti definitti (eli $\bar{x} \cdot \bar{x} > 0$, kun $\bar{x} \neq \bar{0}$).

Tarkastellaan funktiota

$$f: G \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(g, \bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y}),$$

joka on jatkuva (HT).

Jokaisella kiinteällä (\bar{x}, \bar{y}) on siis

$$f(\cdot, \bar{x}, \bar{y}): G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto f(g, \bar{x}, \bar{y}),$$

jatkuva, joten on olemassa

$$\int_G f(g, \bar{x}, \bar{y}) dg = \int_G (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y}) dg.$$

Määritellään

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \int_G (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y}) dg.$$

Osoitetaan, että tämä on sisätulo \mathbb{R}^n :ssä:

1) symmetrisyys: selvä, koska $(\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y}) = (\Phi(g)\bar{y}) \cdot (\Phi(g)\bar{x})$.

2) bilineaarisuus: jos $\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ ja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, niin

$$\langle \bar{x}, \alpha_1 \bar{y}_1 + \alpha_2 \bar{y}_2 \rangle = \int_G (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)(\alpha_1 \bar{y}_1 + \alpha_2 \bar{y}_2)) dg$$

$$\stackrel{\Phi(g) \text{ lin.}}{=} \int_G (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\alpha_1 \Phi(g)\bar{y}_1 + \alpha_2 \Phi(g)\bar{y}_2) dg$$

$$\stackrel{\text{bilin.}}{=} \int_G \alpha_1 (\Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{y}_1) + \alpha_2 (\Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{y}_2) dg$$

$$\stackrel{\int \text{ lin.}}{=} \alpha_1 \int_G \Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{y}_1 dg + \alpha_2 \int_G \Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{y}_2 dg$$

$$= \alpha_1 \langle \bar{x}, \bar{y}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \bar{x}, \bar{y}_2 \rangle.$$

Lineaarisuus 1, muuttujan suhteen vastaavasti (seuraa tietysti myös symmetrisyydestä ja äskeisestä).

3) $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pätee $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \int_G \underbrace{\Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{x}}_{\geq 0 \text{ pistetulon ominaisuuden nojalla}} \geq 0$

↑ integraalin ominaisuus (c)

Jos $\bar{x} \neq \bar{0}$, on $\Phi(g)\bar{x} \neq \bar{0} \quad \forall g \in G$, koska $\Phi(g)$ on lin. isomorfismi $\forall g$.
Siiis $\Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{x} > 0 \quad \forall g$, joten Lauseen 4.2 nojalla on $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$.

Sii's määrittelämme $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on sisätulo.

78

Olk. $g_0 \in G$ mielivaltainen. Os. lopuksi, että

$$\mathbb{E}(g_0) : (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$$

on ortogonaalinen:

olk. $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\langle \mathbb{E}(g_0)\bar{x}, \mathbb{E}(g_0)\bar{y} \rangle = \int \mathbb{E}(g) (\mathbb{E}(g_0)\bar{x}) \cdot \mathbb{E}(g) (\mathbb{E}(g_0)\bar{y}) dg$$

$$= \int (\mathbb{E}(g) \circ \mathbb{E}(g_0))(\bar{x}) \cdot (\mathbb{E}(g) \circ \mathbb{E}(g_0))(\bar{y}) dg$$

\mathbb{E} homomorfismi

$$= \int (\mathbb{E}(gg_0))(\bar{x}) \cdot (\mathbb{E}(gg_0))(\bar{y}) dg$$

$$= \int f(gg_0, \bar{x}, \bar{y}) dg = \int f(g, \bar{x}, \bar{y}) dg = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle.$$

↑
integraalin
invariantisuus (e)

□

Olk. V^n \mathbb{R} -vektoriavaruus, $\dim(V^n) = n$. Lin. isomorfismien $V^n \rightarrow V^n$ ryhmä on topologinen ryhmä, kuten aiemmin todettiin.

Ryhmän G lineaariselle esityksellä V^n :ssä tarkoitetaan jatkuvaa homomorfismia

$$\mathbb{E} : G \rightarrow GL(V^n).$$

Jos $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ on kantava V^n :lle, ja $\varphi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ on G :n lin. esitys, niin saadaan G :n lin. esitys V^n :ssä määrittelemällä

$$\mathbb{E} = \mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \varphi : G \rightarrow GL(V^n),$$

missä $\mathcal{M}_{\mathcal{V}} : GL(V^n) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ on top. ryhmien isomorfismi.

$$A \mapsto [A]_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}$$

Kääntäen, jos $\mathbb{E} : G \rightarrow GL(V^n)$ on lin. esitys V^n :ssä, saadaan G :n lin. esitys määrittelemällä

$$\mathbb{E} = \mathcal{M}_{\mathcal{V}} \circ \varphi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{R}).$$

Määr. 4.14. Topologisen ryhmän G lineaarisella erityisarannudella V^n tarkoitamme äärellisulotteista vektoriarannutta V^n ja lineaarista eitystä $\mathbb{F} : G \rightarrow GL(V^n)$.

Yleensä merk. lyhyemmin $\mathbb{F}(g)\bar{x} = g\bar{x}$, $g \in G, \bar{x} \in V^n$.

Määr. 4.15. Olk. V ryhmän G lineaarinen erityisarannus. Sanomme, että V :n (lineaarinen) aliarannus W on G -invariantti, jos $\mathbb{F}(g)\bar{x} = g\bar{x} \in W \quad \forall g \in G, \bar{x} \in W$.

Teoreema 4.16. Olk. V kompaktin top. ryhmän G lineaarinen erityisarannus, ja W V :n G -invariantti lin. aliarannus. Tällöin \exists V :n G -invariantti lin. aliarannus U s.e. $V = U \oplus W$.

Tod. Olk. $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ V :n kanta. Arannudelle V voidaan määr. sisätulo - kaavalla

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

missä $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{V}}$ ja $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{V}}$ eli $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{v}_i$ ja $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i \bar{v}_i$.

(Siis $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = \delta_{ij}$ eli kanta \mathcal{V} on ortonormaali kanta tämän sisätulo suhteen).

Kuten Teoreeman 4.13 todistuksessa nähdään, että jos määritellään

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \int (\mathbb{F}(g)\bar{x}) \cdot (\mathbb{F}(g)\bar{y}) dg$$

niin saadaan V :lle sisätulo, joka on G -invariantti

(eli $\langle g_0 \bar{x}, g_0 \bar{y} \rangle = \langle \mathbb{F}(g_0)\bar{x}, \mathbb{F}(g_0)\bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall g_0 \in G$).

28.10.13

Määr. nyt

$$U = W^\perp = \{ \bar{v} \in V \mid \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \quad \forall \bar{w} \in W \}.$$

Pidetään tunnettuna [Hönlkasalo: Lin. alg., s. 72-73]

U on lin. aliarannus ja $V = U \oplus W$.

Os. vielä, että U on G -invariantti, eli

$$gU = \mathbb{F}(g)(U) \subset U \quad \forall g \in G.$$

Olk. $\bar{u} \in U$ (merk. $\bar{u}' = \Phi(g)(\bar{u})$)

Jokaisella $\bar{w} \in W$ pätee nyt

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}', \bar{w} \rangle &= \langle \Phi(g)\bar{u}, \bar{w} \rangle \stackrel{\langle, \rangle \text{ G-invariantti}}{=} \langle \Phi(g^{-1})(\Phi(g)\bar{u}), \Phi(g^{-1})\bar{w} \rangle \\ &= \langle \Phi(g^{-1}g)\bar{u}, \Phi(g^{-1})\bar{w} \rangle = \langle \Phi(e)\bar{u}, \Phi(g^{-1})\bar{w} \rangle \\ &= \langle \bar{u}, \Phi(g^{-1})\bar{w} \rangle = 0. \end{aligned}$$

↑
koska W on G -invariantti
ja $\bar{u} \in W^\perp$.

Siis $(\bar{u}' = \Phi(g)(\bar{u})) \in W^\perp = U$, mikä todistaa väitteen. \square

Olk. V G :n lineaarinen esitysavaruus, $\Phi: G \rightarrow GL(V)$.

Ol. että W on V :n G -invariantti lin. aliavaruus. Tällöin, jokaisella $g \in G$,

$$\Phi(g)|_W : W \rightarrow W$$

on lin. isomorfismi.

Siis saadaan G :n lineaarinen esitys W :ssä

$$\Phi' : G \rightarrow GL(W)$$

määrittelemällä

$$\Phi'(g) = \Phi(g)|_W \quad \forall g \in G.$$

Ei ole vaikea osoittaa, että Φ' on jatkuva, jos Φ on (HT).

Täten W siis on G :n lin. esitysavaruus.

Vastavasti Teoreemassa 4.16 saatava G -invariantti aliavaruus U on G :n lin. esitysavaruus.

Siis suora summa $U \oplus W$ on G :n lineaaristen esitysavaruuksien suora summa. Toiminta on tällöin muotoa $g \cdot (u, w) = (gu, gw)$ ja matriisit muotoa $\begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$.

Määr. 4.17. Olk. V G :n lineaarinen esitysavaruus. Sanomme, että V on reduoitumaton (engl. irreducible), jos V :n ainoat G -invariantit lin. aliavaruudet ovat $\{0\}$ ja V .

Teoreema 4.18. Olk. G kompakti ryhmä ja V G :n lin. esitysavaruus.

Tällöin V voidaan esittää suorana summana G :n lin. esitysavaruuksista V_i , $1 \leq i \leq m$; t.s. reduoitumattomista

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m,$$

missä jokainen V_i on G :n reduoitumaton lin. esitysavaruus.

Tod. Käytetään toistuvasti Teoreemaa 4.16. \square

Tietzen-Gleasonin jatkolause

81

Pal. mieleen Tietzen jatkolause [Väisälä: Topologia II, s. 146]:

Olk. X T_4 -avaruus, $A \subset X$ suljettu ja $f: A \rightarrow [a, b]$ jatkuva.
Tällöin f :llä on jatkuva jatke $g: X \rightarrow [a, b]$.

Väite pätee myös, jos suljetun välin $[a, b]$ tilalla on avoin väli tai \mathbb{R}
[Väisälä: Top. I, s. 147].

Olk. G kompakti top. ryhmä ja

$$\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

G :n lineaarinen esitys.

Merkitään $\mathbb{R}^n(\varphi)$ vastaavaa G :n lin. esitysavaruutta;

siis $\mathbb{R}^n(\varphi)$ on \mathbb{R}^n , jossa G toimii esityksen φ välityksellä:

$$\begin{aligned} \Phi: G \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (g, \bar{x}) &\mapsto \varphi(g) \cdot \bar{x}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

\uparrow matr. kertolasku

Kuten aiemmin, merk. $\Phi(g): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se lin. isomorfismi, jolle $[\Phi(g)]_{e, e} = \varphi(g)$.

Tällöin voidaan kirj. myös

$$\begin{aligned} \Phi: G \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (g, \bar{x}) &\mapsto \Phi(g)(\bar{x}). \end{aligned}$$

Teoreema 4.19 (Tietze-Gleason)

Olk. G kompakti top. ryhmä, joka toimii normaalissa top. avaruudessa X ,
ja olkoon A X :n G -invariantti suljettu osajoukko. Olk. $\mathbb{R}^n(\varphi)$

G :n lineaarinen esitysavaruus ja

$$\alpha: A \rightarrow \mathbb{R}^n(\varphi)$$

G -ekvivalentti jatkuva kuvaus.

Tällöin α :lla on G -ekvivalentti jatkuva jatke $\bar{\alpha}: X \rightarrow \mathbb{R}^n(\varphi)$.

Tod. Se, että α on G -ekvivalentti, on tässä yhteydessä

$$\alpha(ga) = \varphi(g) \cdot \alpha(a) = \Phi(g)(\alpha(a)) \quad \forall g \in G, a \in A.$$

Tietzen jatkolauseen nojalla α :lla on jatkuva jatke $\alpha': X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Kuvaus α' ei välttämättä ole G -ekvivalentti.

Määr. nyt $\bar{\alpha} : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}^n(\varphi)$
kaavalla

$$\bar{\alpha}(x) = \int_G \Phi(g^{-1}) (\alpha'(gx)) dg \quad \forall x \in \bar{X}.$$

Kuvaus $f : G \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $(g, x) \mapsto \Phi(g^{-1}) (\alpha'(gx))$

on jatkuvaa (HT),

joten sen jokainen komponenttifunktio $f_i = p_{r_i} \circ f : G \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$)
on jatkuvaa. Vektoriarvoisten funktioiden Haarin integraalin määritelmän
nojalta on nyt

$$\bar{\alpha}(x) = \int_G f(g, x) dg = \left(\int_G f_1(g, x) dg, \dots, \int_G f_n(g, x) dg \right)$$

merk.
= $(\bar{\alpha}_1(x), \dots, \bar{\alpha}_n(x))$.

Teoreeman 4.6 nojalta jokainen $\bar{\alpha}_i : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvaa, ja siis
 $\bar{\alpha} : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuvaa.

Osoitetaan vielä, että $\bar{\alpha}$ on G -ekvivariantti:

olk. $h \in G$. Tällöin

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(hx) &= \int_G \Phi(g^{-1}) (\alpha'(ghx)) dg \\ &= \int_G \Phi(h(gh)^{-1}) (\alpha'(ghx)) dg \\ &= \int_G \Phi(h) \Phi((gh)^{-1}) (\alpha'(ghx)) dg \\ &\stackrel{4.8.}{=} \Phi(h) \int_G \Phi((gh)^{-1}) (\alpha'(ghx)) dg \\ &\stackrel{4.1.(e)}{=} \Phi(h) \int_G \Phi(g^{-1}) (\alpha'(gx)) dg \\ &= \Phi(h) (\bar{\alpha}(x)). \end{aligned}$$

Os. lopuksi, että $\bar{\alpha}|_A = \alpha$:

olk. $a \in A$. Tällöin jokaisella $g \in G$ on

$$\begin{aligned} \Phi(g^{-1}) \underbrace{\alpha'(ga)}_{= \alpha'(ga)} &= \Phi(g^{-1}) (\Phi(g) (\alpha'(a))) = (\Phi(g^{-1}) \circ \Phi(g)) (\alpha'(a)) \\ &= \Phi(e) (\alpha'(a)) = \alpha'(a) = \alpha(a), \text{ joten} \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}(a) = \int_G \Phi(g^{-1}) \alpha'(ga) dg = \int_G \underbrace{\alpha'(a)}_{\text{vakio}} dg = \alpha(a). \quad \square$$

G-invariantin metriikan olemassaolo

Teoreema 4.20 Olk. \mathbb{X} G-avaruus (G kompakti top. ryhmä) ja oletetaan, että \mathbb{X} on metristävä. Tällöin on olemassa metrikka \hat{d} \mathbb{X} :lle, joka on G-invariantti, t.s. $\hat{d}(gx, gy) = \hat{d}(x, y) \quad \forall g \in G, x, y \in \mathbb{X}$.

Tod. Olk. d metrikka \mathbb{X} :lle (eli metriikan d antama topologia on \mathbb{X} :n alkuperäinen topologia).

Määr.

$$\hat{d} : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{d}(x, y) = \int_G d(gx, gy) dg.$$

Integraali on olemassa, koska funktio $G \times \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(g, x, y) \mapsto d(gx, gy)$

on jatkuva.

On osoitettava, että \hat{d} on ^{G-inv.} metrikka ja \hat{d} :n antama topologia on \mathbb{X} :n alkuperäinen topologia.

\hat{d} on metrikka:

- Koska $d(gx, gy) \geq 0 \quad \forall g, x, y$, on $\hat{d}(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$.
- $\hat{d}(x, x) = \int_G d(gx, gx) dg = \int_G 0 dg = 0$.

- olk. $x \neq y$. Tällöin integroitava funktio on > 0 ainakin arvolla $g = e$, tällöin $d(gx, gy) = d(x, y) > 0$.

Lauseen 4.2 nojalla $\hat{d}(x, y) = \int_G d(gx, gy) dg > 0$.

(Itse asiassa integroitava funktio on > 0 kaikilla g)

- Jos $x, y \in \mathbb{X}$, on $\hat{d}(x, y) = \int_G d(gx, gy) dg = \int_G d(gy, gx) dg = \hat{d}(y, x)$.

- Jos $x, y, z \in \mathbb{X}$, niin

$$\hat{d}(x, z) = \int_G d(gx, gz) dg \leq \int_G d(gx, gy) + d(gy, gz) dg$$

$$= \int_G d(gx, gy) dg + \int_G d(gy, gz) dg = \hat{d}(x, y) + \hat{d}(y, z).$$

$\therefore \hat{d}$ on metrikka.

\hat{d} on G -invariantti:

jos $h \in G$, niin

$$\hat{d}(hx, hy) = \int_G d(ghx, ghy) dg \stackrel{(e)}{=} \int_G d(gx, gy) dg = \hat{d}(x, y).$$

\hat{d} :n määrittämä topologia on sama kuin d :n:

Olk. $x_0 \in X$. Merk. $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$
 $\hat{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid \hat{d}(x, x_0) < r\}$

1) Osoitetaan, että

$$\forall r > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.e. } B(x_0, \delta) \subset \hat{B}(x_0, r).$$

Olk. $r > 0$. Tarkastellaan funktiota

$$d^*: G \times (X, d) \times (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g, x, y) \mapsto d(gx, gy),$$

joka on jatkuva.

Teoreeman 4.6 nojalla myös funktio

$$\hat{d}: (X, d) \times (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{d}(x, y) = \int_G d(gx, gy) dg = \int_G d^*(g, x, y) dg$$

on jatkuva. Kun kiinnitetään $y = x_0$, saadaan jatkuva funktio

$$\hat{d}': (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{d}'(x) = \hat{d}(x, x_0).$$

Koska \hat{d}' on jatkuva pisteessä x_0 ja $\hat{d}'(x_0) = 0$, niin

$$\exists \delta > 0 \text{ s.e. } d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |\hat{d}(x, x_0) - \hat{d}(x_0, x_0)| < r.$$

Siis

$$B(x_0, \delta) \subset \hat{B}(x_0, r), \text{ mikä oli väite.}$$

2) Os., että

$$\forall r > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.e. } \hat{B}(x_0, \delta) \subset B(x_0, r).$$

Olk. $r > 0$.

Antiteesi: tällaista lukua δ ei ole, eli $\forall \delta > 0: \hat{B}(x_0, \delta) \not\subset B(x_0, r)$.

Eristyisestä $\hat{B}(x_0, \frac{1}{n}) \not\subset B(x_0, r) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

eli $\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in \hat{B}(x_0, \frac{1}{n})$ s.e. $y_n \notin B(x_0, r)$.

eli $\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n$ s.e. $\hat{d}(y_n, x_0) < \frac{1}{n}$ ja $d(y_n, x_0) \geq r$. (*)

Vali jollaisella $n \in \mathbb{N}$ tällainen y_n .

Jos olisi $d(gy_n, gx_0) \geq \frac{1}{n} \quad \forall g$, niin olisi

$$\hat{d}(y_n, x_0) = \int d(gy_n, gx_0) dg \geq \int \frac{1}{n} dg = \frac{1}{n},$$

rikkaita (*)in kanssa. Siis

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists g_n \in G \text{ s.e. } d(g_n y_n, g_n x_0) < \frac{1}{n}. \quad (**)$$

Koska G on kompakti, voidaan olettaa, että jono (g_n) suppenee, $g_n \rightarrow \bar{g} \in G$ (tarkemmin: kompaktisuudesta seuraa, että jokin osajono suppenee; tarkastellaan tästä eteenpäin k.c.a. osajonoa).
(kun jatkossa tark. jonoja \bar{X} :ssä, käytetään metriikkaa d).

Koska $\mathbb{I} : G \times \{x_0\} \rightarrow \bar{X}$, $(g, x_0) \mapsto gx_0$, on jatkuva, niin $g_n x_0 \rightarrow \bar{g} x_0$ ja edelleen (**):sta seuraa, että

$$g_n y_n \rightarrow \bar{g} x_0.$$

Siiis $(G \times \bar{X})$:ssä on

$$(g_n^{-1}, g_n y_n) \rightarrow (\bar{g}^{-1}, \bar{g} x_0),$$

ja koska toiminta $\mathbb{I} : G \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ on jatkuva, on

$$\lim \underbrace{\mathbb{I}(g_n^{-1}, g_n y_n)}_{= y_n} = \mathbb{I}(\bar{g}^{-1}, \bar{g} x_0) = \bar{g}^{-1}(\bar{g} x_0) = x_0,$$

mistä seuraa, että

$$\lim y_n = x_0,$$

riistiniitä, koska (x) :in nojalla $d(y_n, x_0) \geq r \quad \forall n$.

Siiis anteest on väärä, ja halutunlainen $\delta > 0$ on olemassa. \square

Haar'n integraali on olemassa myös lokaalisti kompakteille ryhmille G , kts. esim. [Husain: Introduction to topological groups, Chapter VI], [Hewitt-Ross: Abstract Harmonic Analysis I, §15].

Jatkakin eroja:

- perustilanteessa voidaan integroida vain funktioita $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, joilla on kompakti kantaja (funktion f kantaja on G :in osajoukko $\{g \in G \mid f(g) \neq 0\}$).
- ominaisuutta (d): $I(1) = 1$ ei ole samassa muodossa, koska vakiofunktion 1 kantaja ei ole kompakti, jos G on epäkomp. Voidaan osittain yksikäsitteisesti vakiokertoimia vaille: jos I, J ovat Haar'n integraaleja, niin $I = c \cdot J$ jollakin vakiolla $c \in \mathbb{R}$.
- kaikille ryhmille G ei ole olemassa integraalia, joka olisi invariantti sekä R_n - että L_n -operaation suhteen.

Käytännön esimerkkejä Haar'n integraalista esim. jollekin matriisiryhmille, kts. [Husain, s. 120-123], [Hewitt-Ross, §15].