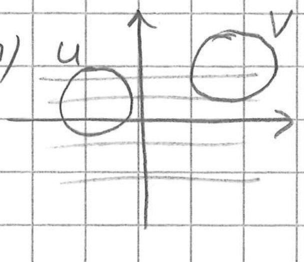
III Vahvat toiminnat (= proper actions)

Olemme nähneet, että kompaktien ryhmien toiminnoilla on topologisesti hyviä ominaisuuksia, esim. $Gx \approx G/G_x$, $Gx \Subset X$, rata-avaruus on Hausdorff. Lokaalisti kompaktien ryhmien n.s. vahvoilla toiminnoilla on vastaavia ominaisuuksia.

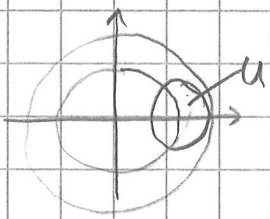
Esim 3.1. 1)



$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(t,(x,y)) \mapsto (x+t, y)$$

$\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap V \neq \emptyset \}$ on rajoitettu

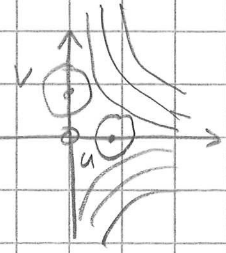
2)



$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$(t, z) \mapsto e^{it} z$$

$\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap U \neq \emptyset \}$ ei rajoitettu (G_x epäkomp.)

3)



$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
$$(t, (x,y)) \longmapsto (e^t x, e^{-t} y)$$

$\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap V \neq \emptyset \}$ ei rajoitettu, HT.
$\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap U \neq \emptyset \}$ on rajoitettu, HT.

10.10.16

Olk. X G-avaruus, G top. ryhmä.
Jos $A, B \subset X$, merkitään
$$G(B|A) = \{ g \in G \mid gA \cap B \neq \emptyset \}.$$

Lemma 3.2. Olk. $A, B, C \subset X$. Tällöin

(i) $G(A|B) = G(B|A)^{-1}$
(ii) $G(B \cup C | A) = G(B|A) \cup G(C|A)$
(iii) $G(B \cap C | A) \subset G(B|A) \cap G(C|A)$.

---

4) Irrationaalinen virtaus torukselle (irrational flow on the torus):

$T^2 = S^1 \times S^1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\mathbb{R} \times T^2 \to T^2$$
$$(t, (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})) = (e^{2\pi i (x+t)}, e^{2\pi i (y+\alpha t)})$$

- radat tiheitä
- $G_z = \{e\}$ $\forall z \in T^2$
- $\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap U \neq \emptyset \}$ ei rajoitettu $\forall U \Subset T^2$.

Tod. (i) olk. $g \in G$. Koska $g^{-1}: \overline{X} \to \overline{X}$, $x \mapsto g^{-1}x$,
on bijektio (itse asiassa homeomorfismi),
on $g^{-1}(A \cap gB) = g^{-1}A \cap g^{-1}gB = g^{-1}A \cap B$.
Siis $A \cap gB \neq \emptyset \iff g^{-1}A \cap B \neq \emptyset$.
Nyt

$$g \in G(A|B) \iff A \cap gB \neq \emptyset \iff B \cap g^{-1}A \neq \emptyset$$
$$\iff g^{-1} \in G(B|A) \iff g = (g^{-1})^{-1} \in G(B|A)^{-1}.$$

(ii)
$$g \in G(B \cup C|A) \iff (B \cup C) \cap gA \neq \emptyset$$
$$\iff (B \cap gA) \cup (C \cap gA) \neq \emptyset \iff B \cap gA \neq \emptyset \text{ tai } C \cap gA \neq \emptyset$$
$$\iff g \in G(B|A) \text{ tai } g \in G(C|A) \iff g \in G(B|A) \cup G(C|A).$$

(iii)
$$g \in G(B \cap C|A) \iff (B \cap C) \cap gA \neq \emptyset$$
$$\iff (B \cap gA) \cap (C \cap gA) \neq \emptyset$$
$$\implies B \cap gA \neq \emptyset \text{ ja } C \cap gA \neq \emptyset$$
$$\iff g \in G(B|A) \text{ ja } g \in G(C|A) \iff g \in G(B|A) \cap G(C|A).$$

$\square$

2,10,13 →

Korollaari 3.3. Olk. $A, B, C \subset \overline{X}$. Tällöin
(i) $G(A|B \cup C) = G(A|B) \cup G(A|C)$
(ii) $G(A|B \cap C) \subset G(A|B) \cap G(A|C)$

Tod. (i) Vastaavasti kuten Lemma 3.2. (ii) tai:

$$G(A|B \cup C) \overset{3.2(i)}{=} G(B \cup C|A)^{-1} \overset{3.2.(ii)}{=} (G(B|A) \cup G(C|A))^{-1}$$

$$= G(B|A)^{-1} \cup G(C|A)^{-1} = G(A|B) \cup G(A|C).$$

↑ jos $L_1, L_2 \subset G$, on $(L_1 \cup L_2)^{-1} = \imath(L_1 \cup L_2) = \imath(L_1) \cup \imath(L_2)$
$= L_1^{-1} \cup L_2^{-1}$,
missä $\imath$ on homeomorfismi $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$.

(ii) Vastaavasti kuten Lemma 3.2. (iii) tai:

$$G(A|B \cap C) = G(B \cap C|A)^{-1} \subset (G(B|A) \cap G(C|A))^{-1}$$

$$= G(B|A)^{-1} \cap G(C|A)^{-1} = G(A|B) \cap G(A|C)$$

↑ $(L_1 \cap L_2)^{-1} = \imath(L_1 \cap L_2) = \imath(L_1) \cap \imath(L_2) = L_1^{-1} \cap L_2^{-1}$.

Lemma 3.4.

(i) Jos $A' \subset A$ ja $B' \subset B$, niin
$$G(B'|A') \subset G(B|A).$$

(ii) Jos $g_0 \in G$, niin
$$G(g_0 B \,|\, A) = g_0 G(B|A)$$

(iii) Jos $g_0 \in G$, niin
$$G(B \,|\, g_0 A) = G(B|A) g_0^{-1}.$$

Tod. (i) $g \in G(B'|A') \Rightarrow gA' \cap B' \neq \emptyset \Rightarrow gA \cap B \neq \emptyset \Rightarrow g \in G(B|A)$.

(ii) $g \in G(g_0 B|A) \Leftrightarrow g_0 B \cap gA \neq \emptyset \Leftrightarrow B \cap g_0^{-1} g A \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow g_0^{-1} g \in G(B|A) \Leftrightarrow g \in g_0 G(B|A)$.

(iii) $g \in G(B|g_0 A) \Leftrightarrow B \cap g g_0 A \neq \emptyset \Leftrightarrow g g_0 \in G(B|A)$

$\Leftrightarrow g \in G(B|A) g_0^{-1}$.

□

Esim. 3.5. Topologisen ryhmän G toiminta itsellään kertolaskulla
$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, g') \longmapsto gg',$$
Olk. $A, B \subset G$. Tällöin
$$g \in G(B|A) \Leftrightarrow B \cap gA \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, a \in A, b \in B : b = ga$$
$$\Leftrightarrow \exists\, a \in A, b \in B : g = ba^{-1} \Leftrightarrow g \in BA^{-1}.$$
Siis tässä tilanteessa
$$G(B|A) = BA^{-1}.$$
□

Jos X on G-avaruus ja $A \subset X$, merkitsemme
$$G_{[A]} = G(A|A) = \{ g \in G \mid gA \cap A \neq \emptyset \}.$$

Määr. 3.6. Olk. G lokaalisti kompakti ryhmä ja $\mathfrak{X}$ Hausdorffin avaruus. Sanomme, että G:n (jatkuva) toiminta $\mathfrak{X}$:ssä on vahva (engl. proper), jos:

$G_{[A]}$ on G:n kompakti osajoukko aina kun A on $\mathfrak{X}$:n kompakti osajoukko.

Huom. 3.7. Kirjallisuudessa esiintyy eri määritelmiä käsitteelle "proper", jotka eivät ole yhtäpitäviä keskenään. Tilanteissa, joissa esiintyy useita "proper"-käsitteitä, käytämme yllä olevasta nimitystä "Borel-proper".

Y.o. määritelmässä ei ole kyse siitä, etteikö $G_{[A]}$ olisi suljettu G:ssä. Alla olevan lemman nojalla $G_{[A]}$ on aina suljettu.

Esim. 3.8. Kts. Esimerkit 3.1. (i) on vahva toiminta
(ii) ei ole
(iii) ei ole
(iv) ei ole

Lemma 3.10. Olk. G top. ryhmä, $\mathfrak{X}$ G-avaruus, merk. toiminta $\Phi : G \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$. $A \subset \mathfrak{X}$ kompakti ja $B \Subset \mathfrak{X}$.
Tällöin $G(B|A) \Subset G$.

Tod. Osoitetaan, että $Q = G \setminus G(B|A) \Subset G$.
Olk. $h \in Q$. Tällöin $B \cap hA = \emptyset$, eli
$$hA \subset \mathfrak{X} \setminus B,$$
eli
$$\Phi(\{h\} \times A) \subset \mathfrak{X} \setminus B,$$
ja koska $\mathfrak{X} \setminus B \Subset \mathfrak{X}$, niin $\Phi^{-1}(\mathfrak{X} \setminus B)$ on joukon $\{h\} \times A$ ympäristö $G \times \mathfrak{X}$:ssä.
Lemman 3.9. nojalla $\exists$ h:n ymp. $W \Subset G$ ja A:n ymp. $U \Subset \mathfrak{X}$ s.e.
$$\{h\} \times A \subset W \times U \subset \Phi^{-1}(\mathfrak{X} \setminus B).$$

$\longrightarrow$

Lemma 3.9. (Väisälä, s. 121)
Olk. $A \subset \mathfrak{X}$ ja $B \subset Y$ kompakteja ja olkoon W joukon $A \times B$ ympäristö $\mathfrak{X} \times Y$:ssä. Tällöin on olemassa avoimet joukot $U \supset A$ ja $V \supset B$, joille $U \times V \subset W$.
Tod. HT.

Siis $\Phi(W \times U) \subset X \setminus B$ ja erityisesti
$$\Phi(W \times A) \subset X \setminus B.$$
Jos nyt $k \in W$, niin $kA \subset X \setminus B$, eli $B \cap kA = \emptyset$ eli
$$k \in Q = G \setminus G(B|A).$$
Siis alkiolle $h \in Q$ löytyi ympäristö $W \subset Q$

Siis $Q \Subset G$ ja $G(B|A) \Subset G$.

$\square$

Lemma 3.11. Olk. G top. ryhmä ja X Hausdorff G-avaruus. Jos $A \subset X$ on kompakti, niin $G_{[A]} \Subset G$.

Tod. A kompakti, X Hausdorff $\Rightarrow A \Subset X$.
Ed. lemman nojalla
$$G_{[A]} = G(A|A) \Subset G.$$
$\square$

Korollaari 3.12. Olk. G top. ryhmä ja X Hausdorff G-avaruus. Jos $A \Subset X$ ja $B \subset X$ on kompakti, niin $G(B|A) \Subset G$.

Tod.
$$\text{Lemma 3.10.} \Rightarrow G(A|B) \Subset G$$
$$\Rightarrow G(B|A) = \underset{\uparrow}{\iota}\, G(A|B) \Subset G.$$
homeomorfismi $g \mapsto g^{-1}$

$\square$

Määr. 3.13. Olk. X, Y Hausdorffin avaruuksia. Sanomme, että jatkuva kuvaus $f: X \to Y$ on vahva (proper), jos $f^{-1}(B)$ on kompakti jokaisella Y:n kompaktilla osajoukolla B.

Lemma 3.14. (i) Yhdistetty kuvaus vahvoista kuvauksista on vahva.
(ii) Olk. X, Y, Z Hausdorffin avaruuksia, $f: X \to Y$ ja $h: Y \to Z$ kuvauksia, joille $h \circ f: X \to Z$ on vahva.
Tällöin
1) $f: X \to Y$ on vahva
2) jos f on surjektio, niin h on vahva.

Tod. HT.

$\square$

Lemma 3.15. Olk. $f : \mathfrak{X} \to Y$ vahva kuvaus, missä $\mathfrak{X}, Y$ ovat Hausdorffin avaruuksia ja Y on lokaalisti kompakti. Tällöin f on suljettu kuvaus.

Tod. HT.

$\square$

Lause 3.16. Olk. G lokaalisti kompakti top. ryhmä ja $\mathfrak{X}$ Hausdorff G-avaruus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) $\Phi : G \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ on vahva toiminta

(ii) $\Phi^* : G \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, $(g,x) \mapsto (gx, x)$, on vahva kuvaus

(iii) $\Phi| : G \times A \to \mathfrak{X}$ on vahva kuvaus, $\forall$ kompakteilla $A \subset \mathfrak{X}$.

Tod. Olk. $A \subset \mathfrak{X}$. Os. ensin, että

$$(1) \qquad G_{[A]} = p\left(\Phi^{*-1}(A \times A)\right),$$

missä $p : G \times \mathfrak{X} \to G$ on projektio:

"$\subset$" olk. $g \in G_{[A]}$, jolloin siis $gA \cap A \neq \emptyset$ ja $\exists\, a \in A$ s.e. $ga = a_1 \in A$.

Nyt
$$\Phi^*(g,a) = (ga, a) = (a_1, a) \in A \times A,$$
joten
$$(g,a) \in \Phi^{*-1}(A \times A)$$
ja
$$g \in p\Phi^{*-1}(A \times A).$$

"$\supset$" olk. $g \in p\Phi^{*-1}(A \times A)$, jolloin siis $\exists\, x \in \mathfrak{X}$ s.e. $(g,x) \in \Phi^{*-1}(A \times A)$.
Tällöin $\Phi^*(g,x) = (gx, x) \in A \times A$.
Siis $x \in A$ ja $gx \in A$, joten $gA \cap A \neq \emptyset$ ja $g \in G_{[A]}$.

$\square$ (1)

(i) $\Rightarrow$ (ii): olk. $C \subset \bar{X} \times \bar{X}$ kompakti. Tällöin
$p_1(C) \subset \bar{X}$ ja $p_2(C) \subset \bar{X}$ ovat kompakteja (p_1, p_2 projektiot),
ja $A = p_1(C) \cup p_2(C) \subset \bar{X}$ on kompakti.
Koska nyt $C \subset A \times A$ ja $\Phi^{*-1}(C) \subset \Phi^{*-1}(A \times A) \subset G \times \bar{X}$,
riittää osoittaa, että $\Phi^{*-1}(A \times A)$ on kompakti.
Kuvauksen Φ^* määritelmästä seuraa, että

$$\Phi^{*-1}(A \times A) \subset G \times A.$$

(1):n nojalla $p(\Phi^{*-1}(A \times A)) = G_{[A]}$, joten

$$\Phi^{*-1}(A \times A) \subset G_{[A]} \times A.$$

Koska nyt $G_{[A]}$ ja A ovat kompakteja ja $\Phi^{*-1}(A \times A)$ on suljettu, väite seuraa tästä.

(ii) $\Rightarrow$ (i): ol. A kompakti.

$$(1) \Rightarrow G_{[A]} = \underbrace{p(\Phi^{*-1}\underbrace{(A \times A)}_{\text{komp.}})}_{\text{(ii)} \Rightarrow \text{komp.}} \text{ on kompakti}$$

$\square$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Os. seuraavaksi, että jos $A, B \subset \bar{X}$, niin

$$(2) \qquad (\Phi|_{G \times A})^{-1}(B) = \Phi^{*-1}(B \times A):$$

"$\subset$" olk. $(g, x) \in (\Phi|_{G \times A})^{-1}(B)$.
Tällöin $(g, x) \in G \times A$ ja $\Phi(g, x) = gx \in B$.
Siis $\Phi^*(g, x) = (gx, x) \in B \times A$, eli $(g, x) \in \Phi^{*-1}(B \times A)$.

"$\supset$" olk. $(g, x) \in \Phi^{*-1}(B \times A)$.
Tällöin $\Phi^*(g, x) = (gx, x) \in B \times A$, joten $gx \in B$ ja $x \in A$.
Koska nyt $(g, x) \in G \times A$ ja $\Phi(g, x) = gx \in B$, niin
$(g, x) \in (\Phi|_{G \times A})^{-1}(B)$.

$\square$ (2)

(ii) ⇒ (iii): olk. $A \subset \mathbb{X}$ kompakti, $B \subset \mathbb{X}$ kompakti.

Tällöin

$$\left(\Phi|_{G\times A}\right)^{-1}(B) \overset{(2)}{=} \underbrace{\Phi^{*^{-1}}(\underbrace{B\times A}_{\text{komp.}})}_{\text{(ii)} \Rightarrow \text{komp.}} \text{ on kompakti.}$$

(iii) ⇒ (ii): olk. $C \subset \mathbb{X}\times\mathbb{X}$ kompakti. Tällöin $C \subset A\times A \subset \mathbb{X}\times\mathbb{X}$, missä A on kompakti (vrt. todistus (i) ⇒ (iii)).

Nyt

$$\Phi^{*^{-1}}(C) \subset \Phi^{*^{-1}}(A\times A) \overset{(2)}{=} \underbrace{\left(\Phi|_{G\times A}\right)^{-1}(A)}_{\text{(iii)} \Rightarrow \text{komp.}},$$

joten $\Phi^{*^{-1}}(C)$ on kompakti, koska se on suljettu.

□ 3.16.

7.10.13 →

Korollaari 3.17. Olk. $\mathbb{X}$ vahva G-avaruus $\overset{(G\text{ lok. komp.})}{,}$ $\mathbb{X}$ lok. kompakti Hausdorff.
Olk. $F \Subset G$ ja $A \subset \mathbb{X}$ kompakti.
Tällöin $FA = \{gx \mid g \in F, x \in A\} \Subset \mathbb{X}$.
Erityisesti $GA \Subset \mathbb{X}$.

Tod. Lauseen 3.16. nojalla $\Phi|_{G\times A}$ on vahva kuvaus.
Koska $\mathbb{X}$ on lok. kompakti Hausdorff, on $\Phi|_{G\times A}$ suljettu kuvaus. (3.15.)
Koska $F\times A \Subset G\times A$, on $(\Phi|)(F\times A) = \Phi(F\times A) = FA \Subset \mathbb{X}$.

□

Lause 3.18. Olk. $\mathbb{X}$ lok. kompakti Hausdorff $\overset{\text{vahva}}{\vee}$ G-avaruus, ja $x \in \mathbb{X}$.
Tällöin:

a) G_x on G:n kompakti aliryhmä
b) rata Gx on suljettu $\mathbb{X}$:ssä
c) $$\varphi_x : G/G_x \to Gx$$
$$gG_x \mapsto gx,$$ on homeomorfismi.

Tod. a) Nyt

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \} = \{ g \in G \mid g\{x\} \cap \{x\} \neq \emptyset \} = G_{[\{x\}]}.$$

Koska $\{x\}$ on kompakti ja toiminta on vahva, on $G_{[\{x\}]}$ kompakti. Siis myös G_x on kompakti.

b) val. korollaarissa 3.17. $F = G$, $A = \{x\}$

$\Rightarrow \quad FA = Gx \Subset \overline{X}$.

c) vrt. Laure 2.31, jossa tämä todistettiin kompaktille ryhmälle G.
Kuten 2.31:ssä nähdään, että φ_x on jatkuva bijektio.
Tällöin käänteiskuvauksen jatkuvuus seuraisi suoraan G:n kompaktisuuden avulla.
Os. nyt, että φ_x on suljettu kuvaus:
Tark. kommutoivaa kaaviota

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi_x"] & \\ G/G_x \arrow[r, "\varphi_x"'] & \overline{X} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ gG_x \arrow[r, mapsto] & gx \end{tikzcd}$$

Nyt Φ_x on suljettu kuvaus:

Jos $F \Subset G$, niin $\Phi_x(F) = Fx \Subset \overline{X}$ 3.17:n nojalla.

Jos $B \Subset G/G_x$, niin

$$\varphi_x(B) = \Phi_x\big(\underbrace{\pi^{-1}(B)}_{\Subset G}\big) \Subset \overline{X}.$$

Siis $\varphi_x : G/G_x \to \overline{X}$ on suljettu kuvaus, joten myös $\varphi_x : G/G_x \to Gx$ on suljettu kuvaus.

Tästä seuraa, että $\varphi_x^{-1} : Gx \to G/G_x$ on jatkuva.

□

Esim. Irrationaalinen virtaus toruksella: φ_x^{-1} ei jatkuva.

Lause 3.19. Olk. $\underline{X}$ lokaalisti kompakti (Hausdorff) vahva G-avaruus. Tällöin rata-avaruus $\underline{X}/G$ on Hausdorff ja lok. kompakti.

Tod. Olk. $\bar{x}, \bar{y} \in \underline{X}/G$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ ja $x, y \in \underline{X}$ s.e. $p(x) = \bar{x}$, $p(y) = \bar{y}$. Tällöin $Gx \cap Gy = \emptyset$ ja Gx, Gy ovat suljettuja $\underline{X}$:ssä Lauseen 3.18. b) nojalla. Olk. A x:n ympäristö, jolle $\bar{A}$ on kompakti ja $\bar{A} \cap Gy = \emptyset$ (lok. kompakti Hausdorff-avaruus on säännöllinen). Koska projektio $p: \underline{X} \to \underline{X}/G$ on avoin kuvaus, on $p(A)$ $\bar{x}$:n ympäristö $\underline{X}/G$:ssä.

Os. että $p(\bar{A}) \Subset \underline{X}/G$:

$p^{-1}p(\bar{A}) = G\bar{A}$ ja $G\bar{A} \Subset \underline{X}$ Korollaarin 3.17. nojalla. Tekijätopologia $\Rightarrow p(\bar{A}) \Subset \underline{X}/G$.

Nyt

$$\bar{y} \in \underline{X}/G \setminus p(\bar{A}) = W$$

ja W on $\bar{y}$:n ympäristö $\underline{X}/G$:ssä, koska

$$p(A) \cap (\underline{X}/G \setminus p(\bar{A})) = \emptyset,$$

nämä ovat $\bar{x}$:n ja $\bar{y}$:n erilliset ympäristöt $\underline{X}/G$:ssä.

Lokaalisti kompaktin avaruuden kuva jatkuvassa avoimessa kuvauksessa on lok. kompakti.

$\square$

Erilaisia "proper"-käsitteen määritelmiä

[Abels, Strantzalos: Proper transformation groups, manuscript]

G lokaalisti kompakti, X Hausdorff G-avaruus

Määr. 3.20. G:n toiminta on *Cartan-toiminta*, jos $\forall x \in X$ $\exists$ ymp. U s.e. $\overline{G(U|U)}$ on kompakti.

Määr. 3.21. Toiminta on *vahva'*, jos $\forall x, y \in X$ $\exists$ ympäristöt U ja V $(x \in U, y \in V)$ s.e. $\overline{G(U|V)}$ on kompakti.

Määr. 3.22. Toiminta on *Palais-toiminta* (Palais proper), jos $\forall x \in X$ $\exists$ ymp. U s.e. $\forall y \in X$ $\exists$ ymp. V s.e. $\overline{G(U|V)}$ on kompakti.

Huom. 3.23. selvästi

Palais-toiminta
$\Downarrow$
vahva'
$\Downarrow$
Cartan-toiminta

Void. osoittaa mm.

1) Cartan-toiminta on vahva' $\Leftrightarrow$ X/G on Hausdorff.
2) X lok. kompakti: vahva' $\Leftrightarrow$ Palais
3) X säännöllinen:
Cartan-toiminta on Palais $\Leftrightarrow$ X/G on säännöllinen.

Huom. 3.24. Jos topologisen ryhmän G toiminta toteuttaa Cartan-ehdon, on G välttämättä lokaalisti kompakti:
Jos $U \Subset X$, on $G(U|U) \Subset G$ (HT),
joten $G(U|U)$ on e:n ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti
$\Rightarrow G$ lok. kompakti.
Siis e.m. määritelmät eivät ole järkeviä käyttää, jos G ei ole lok. kompakti.

Yleisessä tapauksessa (G Hausdorff topologinen ryhmä, X Hausdorff) Abels & Strantzalos käyttää Lauseen 3.16 ehtoa (iii):

(*) kuvaus $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$, on vahva

&

vahvan kuvauksen määritelmää:

$f : X \to Y$ vahva $\Leftrightarrow$ f suljettu ja $f^{-1}(y)$ kompakti $\forall y \in Y$.

Void. myös määritellä:

(**) toiminta on Cartan, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on G-invariantti ympäristö, johon rajoitettuna toiminta on vahva yllä esitetyssä mielessä.

Void. os.: lokaalisti kompaktin ryhmän G tapauksessa nämä määritelmät (*) ja (**) ovat yhtäpitäviä määritelmien 3.20 ja 3.21 kanssa.
1 0

Lause 3.25. Olk. G lok. komp., X lok. komp. Hausdorff G-avaruus. Tällöin G:n toiminta on vahva $\Leftrightarrow$ se on vahva'.

Tod. "$\Rightarrow$" olk. $x, y \in X$
val. niille ympäristöt U, V s.e. $\bar{U}$ ja $\bar{V}$ kompakteja.
Nyt
$$G(U|V) \subset G(\bar{U}|\bar{V}) \subset G(\bar{U} \cup \bar{V} \,|\, \bar{U} \cup \bar{V})$$
Valitaan vahvan toiminnan määritelmässä
$$A = \bar{U} \cup \bar{V}, \text{ joka on kompakti.}$$
Siis $G(\bar{U} \cup \bar{V} \,|\, \bar{U} \cup \bar{V})$ on kompakti
ja myös $\overline{G(U|V)}$ on kompakti.

"$\Leftarrow$" olk. $A \subset X$ kompakti.
Valitaan $\forall\, x, y \in A$ ympäristöt U_x ja V_y s.e. $\overline{G(U_x | V_y)}$ on kompakti. Koska A on kompakti, void. val. pisteet $x_1, \dots, x_n$ ja $y_1, \dots, y_m$ s.e.
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \quad \text{ja} \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{y_j}.$$
Käyttämällä lemmojen 3.2 ja 3.3 kaavoja (ja induktiota) saadaan

$$G_{[A]} = G(A|A) \overset{3.4.(i)}{\subset} G\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \Big| \bigcup_{j=1}^{m} V_{y_j}\Big)$$

$$\overset{3.2.(ii)}{=} \bigcup_{i=1}^{n} G\Big(U_{x_i} \Big| \bigcup_{j=1}^{m} V_{y_j}\Big)$$

$$\overset{3.3.(i)}{=} \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} G(U_{x_i} | V_{y_j}) \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \underbrace{\overline{G(U_{x_i} | V_{y_j})}}_{\text{komp.}}}_{\text{komp.}}$$

Koska $G_{[A]} \Subset G$ Lemman 3.11. nojalla, väite seuraa tästä.

$\square$

Huom. todistuksessa "$\Leftarrow$" ei tarvittu oletusta X lok. kompakti.

Lause 3.26. Olk. G lok. komp., X lok. komp. Hausdorff.
Tällöin G:n toiminta on vahva $\Leftrightarrow$ se on Palais-toiminta.

Tod. "$\Leftarrow$" Palais $\Rightarrow$ vahva' $\overset{3.25.}{\Rightarrow}$ vahva

"$\Rightarrow$" olk. $x \in X$. Val. x:n ympäristö U s.e. $\overline{U}$ on kompakti.
olk. $y \in X$. Val. y:n ymp. V s.e. $\overline{V}$ on kompakti.

$$\text{Nyt}\quad G(U|V) \subset G(\overline{U}|\overline{V}) \subset \underbrace{G(\underbrace{\overline{U} \cup \overline{V}}_{\text{komp.}} | \overline{U} \cup \overline{V})}_{\substack{\text{komp., koska toiminta vahva.} \\ \text{Lisäksi suljettu}}}.$$

Siis $\overline{G(U|V)} \subset G(\overline{U} \cup \overline{V} | \overline{U} \cup \overline{V})$
ja $\overline{G(U|V)}$ on kompakti.

$\square$

9, 10, 13 $\longrightarrow$

Korjaus Lauseen 3.25 todistukseen:

"$\Leftarrow$" Olk. $A \subset \underline{X}$ kompakti.
Valitaan jokaisella pisteparilla $x, y \in A$ ympäristöt $x \in U_{(x,y)}$, $y \in V_{(x,y)}$ s.e. $\overline{G(U_{(x,y)} \mid V_{(x,y)})}$ on kompakti.

Joukot $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)}$ peittävät kompaktin joukon $A \times A$, joten on olemassa parit (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$, s.e.

$$A \times A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{(x_i,y_i)} \times V_{(x_i,y_i)} .$$

Jos nyt $g \in G(A \mid A)$, niin $g a_2 = a_1$ joillakin $a_1, a_2 \in A$;
Koska $(a_1, a_2) \in U_{(x_i,y_i)} \times V_{(x_i,y_i)}$ jollakin $i = 1, \dots, n$, niin $g \in G(U_{(x_i,y_i)} \mid V_{(x_i,y_i)})$.
Siis

$$G(A \mid A) \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\overline{G(U_{(x_i,y_i)} \mid V_{(x_i,y_i)})}}_{\text{kompakti}}}_{\text{kompakti}}$$

Koska $G(A \mid A) \in \mathcal{G}$ Lemman 3.11 nojalla, väite seuraa tästä.

$\square$