Hilbertin 5. ongelma (kalvo)

[Montgomery, Zippin: Topological transformation groups., s. 67]

II Topologiset transformaatioryhmät

Määr. 2.1. G = top. ryhmä
X = top. avaruus

G:n *toiminta* X:ssä on jatkuva kuvaus

$$\varphi : G \times X \to X,$$

(merkitään $\varphi(g,x) = gx$) s.e.

1) $ex = x \quad \forall x \in X$

2) $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x \quad \forall x \in X,\ g_1, g_2 \in G.$

(G, X, φ) on *topologinen transformaatioryhmä*. Sanomme: X on *G-avaruus*.

Esim. 2.2. 1) G top. ryhmä

$$\varphi : G \times G \to G$$
$$(g, g') \mapsto gg' \qquad \text{(jatkuvuus ok.)}$$

Selvästi $eg' = g' \quad \forall g' \in G$ (seuraa neutr. alkion ominaisuudesta)

$g_1(g_2 g') = (g_1 g_2)g' \quad \forall g_1, g_2, g' \in G$ (seuraa tulon liitännäisyydestä)

2) konjugointi:

$$\varphi : G \times G \to G$$
$$(g, \bar{g}) \mapsto g\bar{g}g^{-1} \qquad \text{(jatkuvuus ok.)}$$

(i) $\varphi(e, \bar{g}) = e\bar{g}e^{-1} = \bar{g}$

(ii) $\varphi(g_1, \varphi(g_2, \bar{g})) = \varphi(g_1, g_2\bar{g}g_2^{-1})$

$= g_1(g_2\bar{g}g_2^{-1})g_1^{-1} = (g_1g_2)\bar{g}(g_1g_2)^{-1}$

$= \varphi(g_1g_2, \bar{g})$.

3) G top. ryhmä, H sulj. aliryhmä

$$\varphi: G \times G/_H \to G/_H$$
$$(g, \bar{g}H) \mapsto (g\bar{g})H$$

HT.

Kuten aiemmin (vrt. s. 1), jos $\varphi: G \times \overline{X} \to \overline{X}$ on jatk. toiminta ja $g \in G$, määr.

$$\varphi_g : \overline{X} \to \overline{X}$$
$$x \mapsto gx,$$

joka on jatkuva $\left(\begin{array}{ccccc} \overline{X} & \longrightarrow & G \times \overline{X} & \to & \overline{X} \\ x & \longmapsto & (g, x) & \mapsto & gx \end{array} \right)$

ja $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ on jatkuva.

Siis φ_g on homeomorfismi $\overline{X} \to \overline{X}$.

Lisäksi $\quad \overline{\varphi} : G \to (\mathrm{Homeo}(\overline{X}), \circ)$
$$g \longmapsto \varphi_g$$
on ryhmien homomorfismi: $\quad \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$.

Olk. $\overline{X}$ G-avaruus, $x \in \overline{X}$.

Osajoukkoa
$$\{ gx \mid g \in G \} \subset \overline{X}$$
sanotaan pisteen x radaksi, merk. Gx.

Merk. $G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$

Lemma 2.3. G_x on G:n aliryhmä, G:n isotropia-aliryhmä pisteessä x.

Tod. Selvästi $e \in G_x$.

Jos $g_1, g_2 \in G_x$, niin $g_1 g_2 \in G_x$:
$$(g_1 g_2) x = g_1 (g_2 x) = g_1 x = x.$$

Jos $g \in G_x$, niin $g^{-1} \in G_x$:
$$g^{-1} x = g^{-1}(gx) = (g^{-1} g) x = ex = x. \qquad \square$$

27.9.10 $\longrightarrow$

<u>Lemma 2.4.</u> Olk. $\bar{X}$ G-avaruus ja ol. että $\bar{X}$ on T_1. Tällöin G_x on suljettu G:ssä.

<u>Tod.</u> Tark. kuvausta
$$\hat{\varphi} : G \to \bar{X}$$
$$g \mapsto gx.$$

Nyt
$$G_x = \hat{\varphi}^{-1}(\underbrace{\{x\}}_{\substack{\Subset \bar{X} \\ T_1\text{-ehdon nojalla}}}) \Subset G.$$
□

Jos $\varphi : G \times \bar{X} \to \bar{X}$ on toiminta, määr.

$$\text{Ker}(\varphi) = \{ g \in G \mid gx = x \ \forall x \in \bar{X} \},$$

toiminnan <u>ydin</u>.

Selvästi $\text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{x \in \bar{X}} G_x$.

<u>Kor. 2.5.</u> Jos $\bar{X}$ on T_1 G-avaruus, niin $\text{Ker}(\varphi)$ on G:n sulj. aliryhmä.

<u>Tod.</u> $2.4. \Rightarrow G_x \Subset G \ \forall x \Rightarrow \text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{x \in \bar{X}} G_x \Subset G$. □

<u>Lause 2.6.</u> $\text{Ker}(\varphi)$ on G:n normaali aliryhmä.

<u>Tod.</u> olk. $h \in G$

väite: $h(\text{Ker}(\varphi))h^{-1} \subset \text{Ker}(\varphi)$:

jos $g \in \text{Ker}(\varphi)$, niin
$$(hgh^{-1})(x) = h(g(h^{-1}x)) \overset{g \in \text{Ker}(\varphi)}{=} h(h^{-1}x) = ex = x \quad \forall x.$$

Siis $hgh^{-1} \in \text{Ker}(\varphi)$.

□

<u>Määr. 2.7.</u> Sanomme, että toiminta on <u>tehokas</u> (=effective), jos $\text{Ker}(\varphi) = \{e\}$, eli

$$(gx = x \ \forall x \in \bar{X} \Rightarrow g = e).$$

Teoreema 2.8. Olk. $\mathbb{X}$ G-avaruus ; $\varphi : G \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$; $\mathbb{X}$ T_1

Tällöin $G/\ker\varphi$ on topologinen ryhmä ja $G/\ker\varphi$ toimii $\mathbb{X}$:ssä kaavalla

$$G/\ker\varphi \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$$
$$(g\ker\varphi, x) \mapsto gx .$$

Lisäksi tämä toiminta on tehokas.

Tod. HT

$\square$

Olk. $\mathbb{X}$ G-avaruus. Määr. relaatio $\sim$ $\mathbb{X}$:ssä:

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists\ g \in G \text{ s.e. } gx_1 = x_2 .$$

$\sim$ on ekvivalenssirelaatio:

1) $x \sim x$, koska $ex = x$

2) $x_1 \sim x_2 \Rightarrow \exists\ g \in G$ s.e. $gx_1 = x_2$

$\Rightarrow g^{-1}(gx_1) = g^{-1}x_2 \Rightarrow g^{-1}x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 \sim x_1$

3) ol. $x_1 \sim x_2$ ja $x_2 \sim x_3$

$\Rightarrow \exists\ g_1, g_2$ s.e. $g_1x_1 = x_2$ ja $g_2x_2 = x_3$

$\Rightarrow (g_2g_1)(x_1) = g_2(g_1x_1) = g_2x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3 .$

Siis $\sim$ on ekviv. relaatio ja pisteen $x \in \mathbb{X}$ ekviv. luokka

$$[x] = \{ y \in \mathbb{X} \mid y \sim x \} = \{ gx \mid g \in G \} = Gx ,$$

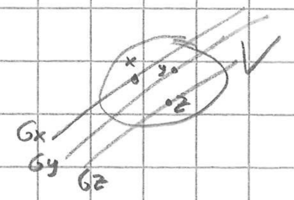
Merk.

$$\mathbb{X}/G = \{ Gx \mid x \in \mathbb{X} \} ,$$ ratojen joukko

Merk. $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}/G$ projektio,
$x \mapsto Gx$

annetaan joukolle $\mathbb{X}/G$ tekijätopologia π:n avulla.
Avaruutta $\mathbb{X}/G$ sanotaan k.o. toiminnan <u>rata-avaruudeksi</u>.

Lemma 2.9. $\pi : X \to X/G$ on avoin kuvaus.



Tod. Olk. $V \overset{\circ}{\subset} X$.
Nyt

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{x \in V} Gx$$

$$= \{ gx \mid g \in G,\ x \in V \} = \bigcup_{g \in G} gV.$$

Nyt $gV = \varphi_g(V) \overset{\circ}{\subset} X$, koska $V \overset{\circ}{\subset} X$ ja φ_g on homeomorfismi.

$$\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(V)) \overset{\circ}{\subset} X \overset{\text{tekijätop.}}{\Rightarrow} \pi(V) \overset{\circ}{\subset} X/G.$$

$\square$

Teoreema 2.10. Olk. G kompakti top. ryhmä, $\varphi : G \times X \to X$ toiminta Hausdorffin avaruudessa X. Tällöin φ on suljettu kuvaus.

Tod. Ol. että G ja X ovat N_1-avaruuksia (jolloin myös $G \times X$ on N_1-avaruus), jolloin voimme käyttää jonoja:

$$x \in \bar{A} \iff \exists \text{ jono } A\text{:n pisteitä, jotka} \xrightarrow{n \to \infty} x.$$

Olk. $B \overset{c}{\subset} G \times X$. Väite: $\varphi(B) \overset{c}{\subset} X$.
Olk. $y \in \overline{\varphi(B)}$ (väite: $y \in \varphi(B)$).

X N_1 $\Rightarrow \exists$ jono $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n \in \varphi(B)$ s.e. $y_n \xrightarrow{n \to \infty} y$.

Olk. $(g_n, x_n) \in B$ s.e. $\varphi(g_n, x_n) = g_n x_n = y_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Koska G on kompakti, on jonolla (g_n) suppeneva osajono,

$$\lim_{i \to \infty} g_{n_i} = g.$$

Nyt myös $y_{n_i} \to y$.
Koska

$$x_n = g_n^{-1}(g_n x_n) = g_n^{-1} y_n,$$

niin

$$\lim_{i \to \infty} x_{n_i} = \lim g_{n_i}^{-1} y_{n_i} = \lim \varphi(g_{n_i}^{-1}, y_{n_i})$$

$$= \varphi(\lim g_{n_i}^{-1}, \lim y_{n_i}) = \varphi(g^{-1}, y) = g^{-1} y.$$

Siis
$$\lim (g_{n_i}, x_{n_i}) = (g, g^{-1}y).$$
Koska
$$(g_{n_i}, x_{n_i}) \in B \ \forall i \quad \text{ja } B \Subset G\times X, \text{ niin } (g, g^{-1}y) \in B.$$
Siis $y = g(g^{-1}y) = \varphi(g, g^{-1}y) \in \varphi(B)$.

□

Huom. 2.11. Jos X ja G eivät ole N_1, edellinen todistus ei toimi, esim. $y \in \overline{\varphi(B)} \not\Rightarrow \exists$ jono (y_n) $\varphi(B)$:ssä s.e. $y_n \to y$.

Todistus voidaan tehdä täsmälleen samoin kuin yllä (ilman N_1-oletusta), jos käytetään jonojen sijasta n.s. verkkoja (net), kts. esim. Bredon: Introduction to Compact Transformation Groups, Th. 1.2., s. 34.

Verkko on jonon yleistys:
jono X:ssä on funktio $\mathbb{N} \to X$,
verkossa $\mathbb{N}$ korvataan jollakin suunnatulla joukolla (directed set). Kts. esim. Väisälä: Top. II, s. 29.

29.9.10 →

Kor. 2.12. Olk. G kompakti top.r., X Hausdorff G-avaruus, $A \Subset X$.
Tällöin $GA = \{ga \mid g\in G, a\in A\} \Subset X$.
Lisäksi jos A on kompakti, niin GA on kompakti.

Tod. $A \Subset X \Rightarrow G\times A \Subset G\times X$

Nyt
$$GA = \varphi(G\times A) \Subset X, \text{ koska } \varphi \text{ on sulj. kuvaus } (2.10.).$$

Jos A kompakti, niin $G\times A$ on kompakti ja $GA = \varphi(G\times A)$ on kompakti.

□

Teoreema 2.13. G komp. top. r.
X Hausdorff G-avaruus.

Tällöin

1) Rata-avaruus X/G on Hausdorff
2) Projektio $\pi : X \to X/G$ on suljettu kuvaus
3) Kuvaus π on vahva (proper), eli ($B \subset X/G$ komp. $\Rightarrow \pi^{-1}(B)$ komp.)
4) X on kompakti $\Leftrightarrow$ X/G on kompakti
5) X on lok. kompakti $\Leftrightarrow$ X/G on lok. kompakti

Tod. 2): olk. $A \in X$.
Nyt $\pi^{-1}\pi A = GA$, joka on suljettu X:ssä (Kor. 2.12.)
Siis $\pi(A) \in X/G$ (tekijätopologia).

Huom. Tekijätopologian määritelmä $U \in X/G \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in X$
on yhtäpitävästi $A \in X/G \Leftrightarrow \pi^{-1}(A) \in X$.

18.9.13 $\rightarrow$

1): olk. $\bar{x}, \bar{y} \in X/G$, $\bar{x} \neq \bar{y}$.
olk. $x, y \in X$ s.e. $\pi(x) = \bar{x}$, $\pi(y) = \bar{y}$.
Nyt $\pi^{-1}(\bar{x}) = Gx$ ja $\pi^{-1}(\bar{y}) = Gy$.
Radat Gx ja Gy ovat kompakteja (Kor. 2.12.) ja erillisiä,
joten niillä on erilliset ympäristöt
(kuva?) $Gx \subset U$, $Gy \subset V$ (Topologia II, s. 119;
tarvitaan: X Hausdorff)
Erityisesti $\bar{U} \cap Gy = \emptyset$.
Nyt $\bar{y} = \pi(y) \notin \pi(\bar{U})$. Lisäksi $\pi(\bar{U}) \in X/G$ 2):n nojalla.
Siis $X/G \setminus \pi(\bar{U})$ on $\bar{y}$:n ympäristö X/G:ssä.
Koska $\pi : X \to X/G$ on avoin kuvaus, on $\pi(U)$ alkion
$\bar{x} = \pi(x)$ ymp. X/G:ssä.
Koska $\pi(U) \cap (X/G \setminus \pi(\bar{U})) = \emptyset$, tämä todistaa 1):n.

3): olk. $C \subset X/G$ kompakti ja olk. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ joukon
$\pi^{-1}C$ avoin peite X:ssä.
Jokaisella $y \in C$ on $\pi^{-1}(y)$ kompakti (rata),
joten $\exists$ äärellinen $A_y \subset A$ s.e.

$$\pi^{-1}(y) \subset \bigcup_{\alpha \in A_y} U_\alpha \overset{\text{merk.}}{=} U_y .$$

Merkitään $V_y = \overline{X}/G \setminus \pi(\overline{X} \setminus U_y)$. "ne radat, jotka kokonaan $\subset U_y$"

Koska $\overline{X} \setminus U_y \in \overline{X}$, niin 2) $\Rightarrow \pi(\overline{X} \setminus U_y) \in \overline{X}/G \Rightarrow V_y \in \overline{X}/G$.

Nyt $\pi^{-1}(V_y) \subset U_y$:

$$x \in \pi^{-1}(V_y) \Rightarrow \pi(x) \in V_y \Rightarrow \pi(x) \notin \pi(\overline{X} \setminus U_y)$$
$$\Rightarrow x \notin \overline{X} \setminus U_y \Rightarrow x \in U_y .$$

Lisäksi $y \in V_y$:

Koska $\pi^{-1}(y) \subset U_y$, niin $y \notin \pi(\overline{X} \setminus U_y)$,
eli $y \in \overline{X}/G \setminus \pi(\overline{X} \setminus U_y) = V_y$.

Joukot V_y, $y \in C$, muodostavat C:n avoimen peitteen. Koska C on kompakti, $\exists\ y_1, \dots, y_n$ s.e.

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} .$$

Siis $$\pi^{-1}(C) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \pi^{-1}(V_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\alpha \in A_{y_i}} U_\alpha ,$$

eli peitteen $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ äärellinen osapeite peittää $\pi^{-1}(C)$:n. $\square$ 3)

4): $\overline{X}$ komp. $\Rightarrow \overline{X}/G = \pi(\overline{X})$ on kompakti.
$\overline{X}/G$ komp. $\overset{3)}{\Rightarrow} \overline{X} = \pi^{-1}(\overline{X}/G)$ on kompakti

5): $\overline{X}$ lok.komp., π jatkuva avoin surjektio $\Rightarrow \overline{X}/G$ lok.komp.
(Vrt. Harj. 2 / Teht. 4)

Ol. $\overline{X}/G$ lok.komp., $x \in \overline{X}$,
olk. V $\pi(x)$:n ympäristö $\overline{X}/G$:ssä s.e. $\overline{V}$ on kompakti.
Nyt $\pi^{-1}(V)$ on x:n ymp. $\overline{X}$:ssä ja $\overline{\pi^{-1}(V)}$ on kompakti,
koska $\pi^{-1}(V) \subset \underbrace{\pi^{-1}(\overline{V})}_{\text{kompakti 3):n nojalla}}$, jolloin myös $\overline{\pi^{-1}(V)} \subset \pi^{-1}(\overline{V})$,
eli $\overline{\pi^{-1}(V)}$ on kompaktin joukon sulj. osajoukkona kompakti.

$\square$ Th. 2.13.

Kiintopistejoukot

Olk. X G-avaruus, $H \leq G$.

Määr. 2.14. Aliryhmän H kiintopistejoukko

$$X^H = \{ x \in X \mid hx = x \ \forall h \in H \}.$$

(Tätä merkintää käytetään joskus myös yhteydessä, jossa kyseessä ei ole aliryhmä, siis: $J \subset G$
$$X^J = \{ x \in X \mid gx = x \ \forall g \in J \} \quad).$$

Esim. 2.15. 1) Jos $H = \{e\}$, on $X^H = X$.

2) Voi olla $X^H = \emptyset$ $\forall H \neq \{e\}$, esim. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(t, (x,y)) \mapsto (x+t, y)$

3) Jos $H \subset K \subset G$, niin $X^K \subset X^H$.

Lemma 2.16. Olk. X G-avaruus, X Hausdorff, $J \subset G$.
Tällöin $X^J \Subset X$.

Tod. Jos $g \in G$, merk. $X^g = \{ x \in X \mid gx = x \}$, jolloin

$$X^J = \bigcap_{g \in J} X^g.$$

Riittää siis os., että $\forall g \in G$: $X^g \Subset X$.
Olk. $g \in G$.
Määr.
$$d_g : X \to X \times X$$
$$x \mapsto (x, gx),$$

jolloin $X^g = d_g^{-1}(\Delta)$, missä $\Delta = \{ (x,x) \in X \times X \mid x \in X \}$.

$$(x \in X^g \Leftrightarrow d_g(x) = (x, gx) = (x,x) \in \Delta \Leftrightarrow x \in d_g^{-1}(\Delta))$$

Nyt X Hausdorff $\Rightarrow \Delta \Subset X \times X$ (HT)

4.10.10. $\longrightarrow$ d_g jatk. $\Rightarrow X^g \Subset X$.

$\square$

Suljetun aliryhmän $H \leq G$ normalisaattori

$$N(H) = \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \}.$$

Normalisaattori $N(H) \subseteq G$ suljettu aliryhmä (HT).

Nyt H on $N(H)$:n suljettu normaali aliryhmä, joten

$$WH := N(H)/H$$

on topologinen ryhmä (Teor. 1,16.).

Lause 2.17. Olk. X G-avaruus, $H \leq G$ sulj. aliryhmä. Tällöin

$$\Psi : W(H) \times X^H \longrightarrow X^H$$
$$(nH, x) \longmapsto nx$$

on ryhmän $W(H)$ toiminta X^H:ssa.

Tod. Os., ensin että rajoittamalla toimintaa $\Phi : G \times X \to X$ saadaan toiminta

$$\Phi| : N(H) \times X^H \to X^H.$$

On siis os., että jos $n \in N(H)$ ja $x \in X^H$, niin $nx \in X^H$:

Olk. $h \in H$. Koska $n \in N(H)$, on $nHn^{-1} = H$ eli $nH = Hn$.

Siis $\exists\, h' \in H$ s.e. $hn = nh'$.

Nyt $h(nx) = (hn)x = (nh')x = n\underbrace{(h'x)}_{=x,\text{ koska } x \in X^H \text{ ja } h' \in H} = nx$.

Siis $h(nx) = nx$ $\forall h \in H$, eli $nx \in X^H$.

Koska H toimii X^H:ssa triviaalisti, on

$$\Psi : N(H)/H \times X^H \to X^H,$$
$$(nH, x) \longmapsto nx$$

hyvin määritelty (vrt. Teoreeman 2.8. todistus (Ker 9)).

Toiminnan ehdot on helppo tarkistaa:

1) $(eH)x = ex = x \quad \forall x \in X$

2) Jos $nH, n'H \in N(H)/H$, $x \in X$, niin

$$nH((n'H)x) = nH(n'x) = n(n'x) = (nn')x$$
$$= (nn'H)x = ((nH)(n'H))x.$$

Jatkuvuus:

$$\begin{array}{ccc} N(H)\times \mathbb{X}^H & \xrightarrow{\Phi|} & \mathbb{X}^H \\ \pi\times id \downarrow & & \downarrow id \\ N(H)/H \times \mathbb{X}^H & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{X}^H \end{array}$$

Kaavio kommutoi (Ψ:n määritelmä).
Lisäksi π avoin (Lemma 1.14.) ja
Harj. 2 / Teht. 1 $\Rightarrow$ $\pi\times id$ on avoin $\overset{1.17}{\Rightarrow}$ $\pi\times id$ samastuskuvaus

Nyt $id\circ\Phi|$ jatkuva $\overset{1.18.}{\Rightarrow}$ Ψ on jatkuva. $\square$

Eräs kompaktien ryhmien tärkeä ominaisuus

Lemma 2.18. Olk. G kompakti ryhmä, $g_0\in G$.
Merk.
$$A=\{g_0^n \mid n=0,1,2,\dots\}.$$
Tällöin $\bar{A}$ on G:n aliryhmä.
(Tässä siis käänteisalkion olemassaolo on epätriviaalia, esim. HT).

Tod. Selvästi $\mu(A\times A)\subset A$ $\quad (g_0^n\cdot g_0^m = g_0^{n+m})$
Tästä seuraa
$$\mu(\bar{A}\times\bar{A}) = \mu(\overline{A\times A}) \overset{\text{jatk.}}{\subset} \overline{\mu(A\times A)}\subset\bar{A},$$
eli $\bar{A}$ on sulj. kertolaskun suhteen.

Myös $e\in A\subset\bar{A}$.

Käänteisalkiot ?

Merk. $B=\{g_0^m \mid m\in\mathbb{Z}\}$.
Nyt B on G:n aliryhmä, joten 1.12. $\Rightarrow$ $\bar{B}$ on aliryhmä.

Jaetaan tarkastelu kahteen osaan:

(i) e on B:n erillinen piste, eli $\exists\, e \in U \Subset G$ s.e.
$$U \cap B = \{e\}.$$
Os., että $U \cap \overline{B} = \{e\}$:
olk. $B' = B \setminus \{e\}$. Nyt $B' \subset G \setminus U$, joten $\overline{B'} \subset G \setminus U$, koska $G \setminus U$ on suljettu.
Koska
$$\overline{B} = \overline{B' \cup \{e\}} = \overline{B'} \cup \overline{\{e\}} = \overline{B'} \cup \{e\},$$
on
$$U \cap \overline{B} = U \cap (\overline{B'} \cup \{e\}) = \underbrace{(U \cap \overline{B'})}_{= \emptyset, \text{ koska } \overline{B'} \subset G \setminus U} \cup (U \cap \{e\}) = \{e\}.$$

23.9.13 →

Siis e on erill. piste myös $\overline{B}$:ssa, eli $\{e\} \Subset \overline{B}$.
$\overline{B}$ top. ryhmä $\Rightarrow$ jokainen yksiö on avoin $\Rightarrow$ $\overline{B}$:n topologia on diskreetti.

Kuitenkin $\overline{B}$ on kompakti, koska $\overline{B} \Subset G$ ja G on kompakti.
Siis $\overline{B}$ on äärellinen, joten $\exists\, m > 0$ s.e.
$$g_0^m = e:$$
kuvaus $\mathbb{Z} \to B \subset \overline{B} : m \mapsto g_0^m$
ei voi olla inj., koska $\overline{B}$ on äärellinen.
Siis $\exists\, m', m'' \in \mathbb{Z}$, $m' \neq m''$, s.e. $g_0^{m'} = g_0^{m''}$.
Void. ol. $m' > m''$. Tällöin $m = m' - m'' > 0$
ja $g_0^m = g_0^{m'-m''} = (g_0^{m'})(g_0^{m''})^{-1} = e$.

Siis
$$\overline{B} = \{e, g_0, g_0^2, \ldots, g_0^{m-1}\} = A$$
(äärellinen syklinen ryhmä) ja $\overline{A} = A$ on G:n aliryhmä.
(Huom. $(g_0^k)^{-1} = g_0^{m-k}$)

(ii) Ol. sitten, että jokainen e:n ympäristö kohtaa joukon $B \setminus \{e\}$.
Erityisesti, jos W on e:n symmetrinen ympäristö, niin $\exists\, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, s.e.
$$g_0^m \in W.$$
Koska W on symmetrinen, myös $g_0^{-m} \in W$, joten void. ol. $m > 0$.
Nyt
$$g_0^{m-1} = g_0^{-1} \cdot g_0^m \in g_0^{-1} W \cap A, \quad \text{koska } m-1 \geq 0.$$
Siis
$$g_0^{-1} W \cap A \neq \emptyset$$
jokaisella e:n $\underset{\text{symm.}}{\text{ympäristöllä}}$ W.

(Pal. mieleen H1/T5: jokainen e:n ympäristö sisältää e:n symmetr. ympäristön).

Koska muotoa $g_0^{-1}W$ olevat joukot, missä W on
ein symmetrinen ympäristö, muodostavat ympäristökannan
pisteessä g_0^{-1}, on
$$g_0^{-1} \in \bar{A}.$$

Todistuksen alussa todettiin, että $\bar{A}$ on suljettu kertolaskun
suhteen, joten
$$g_0^{-n} \in \bar{A} \quad \forall n > 0.$$
Siis $\quad B \subset \bar{A}$, joten $\bar{B} \subset \bar{A}$.
Koska myös $A \subset B$, on $\bar{A} \subset \bar{B}$, eli $\bar{A} = \bar{B}$.
Alussa todettiin, että $\bar{B}$ on aliryhmä, joten myös $\bar{A}$ on. $\square$

6.10.10 $\longrightarrow$

Lemma 2.19. Olk. G kompakti top. r., H suljettu aliryhmä.
Jos $g_0 \in G$ on sellainen, että $g_0 H g_0^{-1} \subset H$,
niin $g_0 H g_0^{-1} = H$, eli $g_0 \in N(H)$.

Tod. Koska $g_0 H g_0^{-1} \subset H$, on
$$g_0^2 H (g_0^2)^{-1} = g_0 (g_0 H g_0^{-1}) g_0^{-1} \subset g_0 H g_0^{-1} \subset H \quad \text{jne.}$$
Siis
$$g_0^n H (g_0^n)^{-1} \subset H \;\; \forall n \geq 0.$$
Jos merk. $A = \{g_0^n \mid n \geq 0\}$, niin
edellisen lemman nojalla $\bar{A}$ on G:n aliryhmä.
Tark. jatkuvaa funktiota
$$\Psi : G \times G \to G$$
$$(g, g') \mapsto g g' g^{-1}.$$
Edellä es. nojalla
$$(*) \qquad \Psi(A \times H) \subset H,$$
joten
$$(**) \quad \Psi(\bar{A} \times H) \overset{H \text{ sulj.}}{=} \Psi(\overline{A \times H}) \overset{\text{jatk.}}{\subset} \overline{\Psi(A \times H)} \overset{(*)}{\subset} \bar{H} \overset{H \text{ sulj.}}{=} H.$$
Koska $\bar{A}$ on aliryhmä, on
$$g_0^{-1} \in \bar{A},$$
joten
$$(**) \Rightarrow \quad g_0^{-1} H (g_0^{-1})^{-1} \subset H,$$
$$\text{eli} \quad g_0^{-1} H g_0 \subset H$$
$$\text{eli} \quad H \subset g_0 H g_0^{-1}.$$
Koska oletimme, että
$$g_0 H g_0^{-1} \subset H,$$
saadaan $\quad g_0 H g_0^{-1} = H. \quad \square$

Lemma 2.20. Olk. G kompakti top. ryhmä; H, K sulj. aliryhmiä. Ol., että H on konjugoitu K:n aliryhmän kanssa ja K on konjugoitu H:n aliryhmän kanssa. Tällöin H ja K ovat konjugoituja.

Tod. Ol. $\Rightarrow$ $\exists$ K:n aliryhmä K_1 ja $g_1 \in G$ s.e.

$$g_1 H g_1^{-1} = K_1 ,$$

sekä $\exists$ H:n aliryhmä H_2 ja $g_2 \in G$ s.e.

$$g_2 K g_2^{-1} = H_2 .$$

Siis

$$\left.\begin{aligned}(g_1 g_2) K (g_1 g_2)^{-1} &= g_1 (g_2 K g_2^{-1}) g_1^{-1} \\ &\subset g_1 H g_1^{-1} \subset K .\end{aligned}\right\} (*)$$

Ed. lemmasta saadaan nyt

$$(g_1 g_2) K (g_1 g_2)^{-1} = K$$

eli $(*)$:n nojalla

$$g_1 H g_1^{-1} = K .$$

(Void. myös os., että $g_2 K g_2^{-1} = H$).

$\square$

Isotropiatyypit

Tutkitaan seuraavaksi aliryhmien n.s. konjugaatioluokkia. Yhteys transf. ryhmien teoriaan tulee seur. lemmasta:

Lemma 2.21. Olk. G top. ryhmä, X G-avaruus; $x \in X$, $g \in G$. Tällöin

$$G_{gx} = g G_x g^{-1} .$$

Tod. HT.

$\square$

Olk. nyt G (topologinen) ryhmä, H aliryhmä. Merk.

$$[H] = \{ gHg^{-1} \mid g \in G \},$$

H:n konjugaatioluokka, eli kaikkien H:n kanssa konjugoitujen G:n aliryhmien joukko.

Jos halutaan välttää tietyn aliryhmän käyttöä merkinnässä $[H]$, käytetään usein kaunokirj. kirjainta konjugaatioluokan merkkinä, esim. $\mathcal{H}$.

Konjugaatioluokkaa sanotaan myös isotropiatyypiksi.

Olk. X G-avaruus ja $x \in X$. Ed. lemman nojalla isotropiaryhmät pisteen x radan eri pisteissä gx muodostavat konjugaatioluokan

$$[G_x] = \{ g G_x g^{-1} \mid g \in G \}.$$

Tätä sanotaan pisteen x (tai radan Gx) isotropiatyypiksi.

Jos $H \leq G$, sanomme että isotropiatyyppi $[H]$ esiintyy G-avaruudessa X, jos $\exists\, x \in X$ s.e. $[G_x] = [H]$.

Isotropiatyyppien välille voidaan määritellä järjestysrelaatio:

Määr. 2.22. G top. ryhmä; $H, K \leq G$.
Määr.

$[H] \leq [K] \iff H$ on konjugoitu jonkin K:n aliryhmän kanssa.

Hyvin määritelty:

Jos $H' \in [H]$ ja $K' \in [K]$, on osoitettava, että H' on konjugoitu jonkin K':n aliryhmän kanssa.

Nyt

$$H' = g_1 H g_1^{-1} \quad \text{joll. } g_1 \in G$$

ja $$K' = g_2 K g_2^{-1} \quad \text{joll. } g_2 \in G,$$

lisäksi $$g_0 H g_0^{-1} \subset K \quad \text{joll. } g_0 \in G.$$

Siis

$$g_0 (\underbrace{g_1^{-1} H' g_1}_{=H}) g_0^{-1} \subset \underbrace{g_2^{-1} K' g_2}_{=K}$$

ja

$$(g_2 g_0 g_1^{-1}) H' (g_2 g_0 g_1^{-1})^{-1} \subset K'. \qquad \square$$

Jatkossa tutkimme ainoastaan suljettujen aliryhmien H isotropiatyyppejä $[H]$.

Huom! Jos H on suljettu ja $H' \in [H]$, niin H' on suljettu:

Jos $H' = \bar{g} H \bar{g}^{-1}$, niin $H' = \gamma(H)$, missä γ on homeomorfismi $\gamma : G \to G$

$$g \mapsto \bar{g} g \bar{g}^{-1}. \quad \square$$

Lause 2.23. Olk. G kompakti top. ryhmä. Tällöin relaatio $\le$ on osittainen järjestys kaikkien isotropiatyyppien joukossa, eli

1) $[H] \le [H] \quad \forall [H]$.
2) $[H] \le [K]$ ja $[K] \le [L] \Rightarrow [H] \le [L] \quad \forall [H], [K], [L]$.
3) $[H] \le [K]$ ja $[K] \le [H] \Rightarrow [H] = [K] \quad \forall [H], [K]$.

Tod. 1) selvä, koska $eHe^{-1} = H$

2) Jos $g_1 H g_1^{-1} \subset K$ ja $g_2 K g_2^{-1} \subset L$, niin
$$g_2 g_1 H (g_2 g_1)^{-1} = g_2 g_1 H g_1^{-1} g_2^{-1} \subset g_2 K g_2^{-1} \subset L,$$
joten $[H] \le [L]$.

3) seuraa suoraan Lemmasta 2.20. $\square$

11.10.10.

Merkintöjä $[H] < [K]$, jos $[H] \le [K]$ ja $[H] \ne [K]$.

Olk. nyt X G-avaruus, H G:n sulj. aliryhmä.

$$X^H = \{x \in X \mid hx = x \ \forall h \in H\} = \{x \in X \mid H \subset G_x\}$$

$$X_H = \{x \in X \mid G_x = H\}$$

$$X^{>H} = \{x \in X \mid H \subsetneq G_x\}.$$

Selvästi $X^{>H} = X^H \setminus X_H$ ja $X_H = X^H \setminus X^{>H}$, koska
$$X^H = X_H \cup X^{>H} \quad \text{ja} \quad X_H \cap X^{>H} = \emptyset.$$

Vastaavat merkinnät konjugaatioluokille eli isotropiatyypeille:

$$X^{[H]} = \{x \in X \mid [H] \le [G_x]\}$$

$$X_{[H]} = \{x \in X \mid [H] = [G_x]\}$$

$$X^{>[H]} = \{x \in X \mid [H] < [G_x]\}.$$

Siis $X^{>[H]} = X^{[H]} \setminus X_{[H]}$ ja $X_{[H]} = X^{[H]} \setminus X^{>[H]}$.

Lemma 2.24. Ol. G top. ryhmä, H sulj. aliryhmä ja $\underline{X}$ G-avaruus.
Tällöin
1) $\underline{X}^{[H]} = G\underline{X}^H$
2) $\underline{X}_{[H]} = G\underline{X}_H$

Tod. 1) "$\subset$" olk. $y \in \underline{X}^{[H]}$. Tällöin $[H] \leq [G_y]$, eli $gHg^{-1} \subset G_y$ jollakin $g \in G$.
Siis
$$H \subset g^{-1}G_y g \overset{HT}{=} G_{g^{-1}y} \text{ ja siis } g^{-1}y \in \underline{X}^H.$$
Siis
$$y \in g\underline{X}^H \subset G\underline{X}^H.$$

"$\supset$" olk. $y \in G\underline{X}^H$. Tällöin $y = gx$ jollakin $x \in \underline{X}^H$, $g \in G$.
Nyt $H \subset G_x$, joten
$$gHg^{-1} \subset gG_xg^{-1} = G_{gx} = G_y.$$
25.9.13 → Siis $[H] \leq [G_y]$ eli $y \in \underline{X}^{[H]}$.

2) "$\subset$" olk. $y \in \underline{X}_{[H]}$. Tällöin siis $[G_y] = [H]$, joten $\exists\, g \in G$ s.e. $gHg^{-1} = G_y$.
Siis
$$H = g^{-1}G_y g = G_{g^{-1}y},$$
joten
$$g^{-1}y \in \underline{X}_H \text{ ja } y \in g\underline{X}_{[H]} \subset G\underline{X}_{[H]}.$$

"$\supset$" olk. $y \in G\underline{X}_H$. Tällöin $y = gx$ jollakin $x \in \underline{X}_H$, $g \in G$.
Nyt siis $G_x = H$ ja
$$G_y = G_{gx} = gG_xg^{-1} = gHg^{-1},$$
joten
$$[G_y] = [H] \text{ ja siis } y \in \underline{X}_{[H]}.$$
$\square$

Jos $\underline{X}$ on G-avaruus ja $A \subset \underline{X}$, sanomme osajoukkoa A <u>G-invariantiksi</u>, jos $GA = A$ eli jos $ga \in A$ $\forall\, g \in G, a \in A$.

Yllä esitetystä seuraa, että joukot $\underline{X}^{[H]}$ ja $\underline{X}_{[H]}$ ovat G-invariantteja.
Huom. $\underline{X}^H$ ja $\underline{X}_H$ eivät yleensä ole.

Lemma 2.25. Olk. G kompakti top. r., $\underline{X}$ T_1 G-avaruus ja H G:n sulj. aliryhmä. Tällöin
$$\underline{X}^{>[H]} = G\,\underline{X}^{>H}.$$

Tod. "$\subset$" olk. $y \in \underline{X}^{>[H]}$, eli $[H] < [G_y]$.
Siis $\exists\ g \in G$ s.e.
$$gHg^{-1} \subset G_y,$$
mutta $[H] \neq [G_y]$ eli H ja G_y eivät ole konjugoituja.
Siis
$$gHg^{-1} \subsetneq G_y$$
ja
$$H \subsetneq g^{-1}G_y g = G_{g^{-1}y},$$
joten
$$g^{-1}y \in \underline{X}^{>H}.$$
Siis $\quad y \in g\underline{X}^{>H} \subset G\underline{X}^{>H}$.

Huom. tässä ei tarvittu oletusta G:n kompaktisuudesta.

"$\supset$" olk. $y \in G\underline{X}^{>H}$, eli $y = gx$ joillakin $x \in \underline{X}^{>H}$, $g \in G$.
Siis $H \subsetneq G_x$ ja
$$gHg^{-1} \subsetneq gG_xg^{-1} = G_{gx} = G_y,$$
josta saadaan
$$[H] \leq [G_y].$$
Os. nyt että $[H] \neq [G_y]$, mistä väite seuraa:
Antiteesi: $[H] = [G_y]$ eli $\exists\ \bar{g} \in G$ s.e.
$$G_y = \bar{g}H\bar{g}^{-1}.$$
Tällöin siis $gHg^{-1} \subsetneq \bar{g}H\bar{g}^{-1}$ ja
$$\bar{g}^{-1}gHg^{-1}\bar{g} \subsetneq H,$$
eli H on konjugoitu aidon aliryhmänsä kanssa RR, koska G on kompakti.

Siis $[H] < [G_y]$ eli $y \in \underline{X}^{>[H]}$. $\square$

Ekvivariantit kuvaukset

Olk. G top. ryhmä ja X, Y G-avaruuksia.
Sanomme, että (jatkuva) kuvaus $f : X \to Y$ on G-ekvivariantti tai G-kuvaus, jos

$$(*) \qquad f(gx) = g\,f(x) \quad \forall g \in G,\ x \in X.$$

$$\begin{tikzcd} gx \arrow[r, dotted] & gf(x) \\ x \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & f(x) \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Tai täsmällisemmin, jos merkitään G:n toimintoja $\Phi : G \times X \to X$ ja $\Psi : G \times Y \to Y$:

$$f(\Phi(g,x)) = \Psi(g, f(x)) \quad \forall g \in G,\ x \in X,$$

t.s. kaavio

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\mathrm{id} \times f"] \arrow[d, "\Phi"'] & G \times Y \arrow[d, "\Psi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Esim. 2.26.

1) $G = \mathbb{Z}_2 = \{e, t\}$, $t^2 = e$
$X = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}$, G:n toiminta
$$\bar{g}(g,x) = (\bar{g}g, x) \quad \forall (g,x) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R},\ \bar{g} \in \mathbb{Z}_2 .$$

$Y = \mathbb{R}^2$, G:n toiminta
$$t(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

Tällöin funktio $f : X \to Y$
$$(e,x) \mapsto (x,1)$$
$$(t,x) \mapsto (x,-1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
on ekvivariantti:
$$f(t(e,x)) = f(t,x) = (x,-1) = t(x,1) = t f(e,x)$$
ja
$$f(t(t,x)) = f(e,x) = (x,1) = t(x,-1) = t f(t,x).$$

2) $G, \bar{X}, Y$ kuten edellä.

$$h : \bar{X} \to Y$$
$$(e,x) \mapsto (x,0)$$
$$(t,x) \mapsto (x,0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

on ekvivariantti, koska

$$h(t(e,x)) = h(t,x) = (x,0) = t(x,0) = th(e,x)$$

ja $h(t(t,x)) = h(e,x) = (x,0) = t(x,0) = th(t,x)$.

3) $G, \bar{X}, Y$ kuten edellä.

$$h' : \bar{X} \to Y$$
$$(e,x) \mapsto (x,1)$$
$$(t,x) \mapsto (x,1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ei ole ekvivariantti:

$$h'(t(e,0)) = h'(t,0) = (0,1)$$
$$t(h'(e,0)) = t(0,1) = (0,-1)$$
$\neq$.

Lemma 2.27. Olk. $f : \bar{X} \to Y$ bijektiivinen G-kuvaus ($\bar{X}, Y$ G-avaruuksia). Tällöin $f^{-1} : Y \to \bar{X}$ toteuttaa G-kuvauksen määritelmän ehdon $(*)$.

Tod. Olk. $g \in G$, $y \in Y$.

(huom. f^{-1} ei välttämättä jatkuva)

Nyt $f(f^{-1}(gy)) = gy$

ja $f(gf^{-1}(y)) \underset{f\ G\text{-kuv.}}{=} g(ff^{-1}(y)) = gy$

f inj. $\Rightarrow f^{-1}(gy) = gf^{-1}(y)$. $\square$

13.10.10.

Lemma 2.28. Olk. $f : \bar{X} \to Y$ G-kuvaus ja $x \in \bar{X}$. Tällöin $G_x \subset G_{f(x)}$.

Tod. Olk. $h \in G_x$.

Nyt $hf(x) \overset{f\text{ ekviv.}}{=} f(hx) \overset{h \in G_x}{=} f(x)$, eli $h \in G_{f(x)}$. $\square$

Määr. 2.29. Sanomme, että G-kuvaus $f : \bar{X} \to Y$ on isovariantti, jos $G_x = G_{f(x)}$ $\forall x \in \bar{X}$.

Lemma 2.30. Olk. $f: X \to Y$ G-ekvivariantti homeomorfismi (eli G-homeomorfismi). Tällöin f on isovariantti.

Tod. Olk. $x \in X$. Nyt $G_x \subset G_{f(x)}$ ed. lemman nojalla.
Lemman 2.27 nojalla f^{-1} on ekvivariantti ja siis

$$G_{f(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ 2.28.}}{\subset} G_{f^{-1}(f(x))} = G_x .$$

Siis $G_x = G_{f(x)}$.

$\square$

Palautetaan mieleen, että jos G on top. ryhmä, H suljettu aliryhmä, niin

$$\Psi : G \times G/H \to G/H$$
$$(g, \bar{g}H) \mapsto g\bar{g}H$$

on hyvin määr. jatkuva toiminta.

Lause 2.31. Olk. G kompakti top. ryhmä, X Hausdorff G-avaruus ja $x \in X$. Tällöin rata Gx on X:n G-invariantti suljettu ja kompakti osajoukko ja $\exists$ G-ekviv. homeomorfismi

$$\eta : Gx \to G/G_x .$$

Tod.
- Gx G-invariantti : $\bar{g}(gx) = (\bar{g}g)x \in Gx$ ok.
- Gx kompakti : $Gx = \Phi(G \times \{x\})$, missä Φ on G:n toiminta ok.
- Gx sulj. koska se on kompakti.

Merk. $G_x = H$, jolloin H on G:n suljettu aliryhmä.
Määr.
$$f : G/H \to Gx$$
$$gH \mapsto gx .$$

1) f hyvin määr. : Jos $gH = g'H$, niin $g = g'h$ jollakin $h \in H = G_x$.
Tällöin $gx = g'hx = g'x$ ok.

2) f on surjektio : olk. $y \in Gx$. Tällöin $y = gx$ jollakin $g \in G$
ja $f(gH) = gx = y$.

3) f on injektio:

olk. $f(gH) = f(g_1 H)$, eli $gx = g_1 x$.

Tällöin $g_1^{-1} g x = x$ eli $g_1^{-1} g \in G_x = H$.

Siis $g = g_1 h$ jollakin $h \in H$ ja

$g_1 H = gH \in G/H$.

4) f on jatkuva:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\vartheta"] & \\ G/H \arrow[r, "f"] & Gx \end{tikzcd}$$

$\vartheta : g \mapsto gx$ on toiminnan Φ rajoittumana jatkuva

π on tekijäkuvaus

$\overset{1.18}{\Longrightarrow}$ f on jatkuva.

5) f^{-1} on jatkuva: Koska G/H on kompakti ja Gx on Hausdorff, tämä seuraa siitä, että f on jatkuva bijektio.

(Huom. 1) – 5) $\Rightarrow$ f on homeomorfismi)

6) f on G-kuvaus:

$$f(\bar{g}(gH)) = f((\bar{g}g)H) = (\bar{g}g)x = \bar{g}(gx) = \bar{g}f(gH),$$

$\forall\, \bar{g} \in G,\ gH \in G/H$

$\square$

Huom. $f^{-1} : Gx \to G/H$, $gx \mapsto gH$ on myös G-ekviv. homeomorfismi.

30.9.13

Tarkastellaan seuraavaksi G-kuvauksia
$$f: G/H \to G/K,$$
missä H ja K ovat top. ryhmän G suljettuja aliryhmiä.

Jos $f: G/H \to G/K$ on G-kuvaus, merk. $f(eH) = g_0 K$.
Tällöin
$$\forall gH \in G/H: \quad f(gH) = f(g(eH)) \overset{f \text{ ekviv.}}{=} g\, f(eH) = g(g_0 K) = g g_0 K,$$
joten f:n arvo alkiolla eH määrää koko funktion f.

Lisäksi $G_{eH} = H$, koska $g(eH) = eH \Leftrightarrow gH = eH \Leftrightarrow g \in H$.
Siis
$$G_{g_0 K} = G_{g_0(eK)} = g_0 G_{eK} g_0^{-1} = g_0 K g_0^{-1}.$$
Koska f on G-kuvaus, on siis
$$G_{eH} \subset G_{g_0 K}$$
eli
$$H \subset g_0 K g_0^{-1}$$
eli
$$g_0^{-1} H g_0 \subset K.$$

Siis: Jos on olemassa G-kuvaus $G/H \to G/K$, niin välttämättä H on konjugoitu K:n aliryhmän kanssa, eli $[H] \leq [K]$.

Kääntäen:

Lause 2.32. Oletetaan, että $g_0 \in G$ ja $H \subset g_0 K g_0^{-1}$. Tällöin voidaan määritellä G-kuvaus
$$f: G/H \to G/K$$
kaavalla
$$gH \longmapsto g g_0 K.$$

Tod. 1) f hyvin määr.:
Jos $gH = g'H$, niin $g = g'h$ jollakin $h \in H$ ja
$$f(gH) = g g_0 K = g' h g_0 K = g' g_0 \underbrace{g_0^{-1} h g_0}_{\in K, \text{ koska } g_0^{-1} H g_0 \subset K} K$$
$$= g' g_0 K = f(g'H). \quad \text{ok.}$$

2) f G-kuvaus:

$$f(\bar g(gH)) = f((\bar g g)H) = \bar g g g_0 K = \bar g f(gH)$$
$$\forall \bar g \in G,\ gH \in G/H.$$

3) f jatkuva:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "r_{g_0}"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi'"] \\ G/H \arrow[r, "f"'] & G/K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & gg_0 \arrow[d, mapsto] \\ gH \arrow[r, mapsto] & gg_0K \end{tikzcd}$$

eli kaavio kommutoi.

Nyt $\pi' \circ r_{g_0}$ on jatkuva ja π on tekijäkuvaus, joten f on jatkuva.

$\square$

18.10.10. $\longrightarrow$

Lause 2.33. Olk. G topryhmä, H, K suljettuja aliryhmiä. Tällöin G/H ja G/K ovat G-homeomorfiset $\Leftrightarrow$ H ja K ovat konjugoituja G:ssä.

Tod. "$\Leftarrow$" ol. että $H = g_0 K g_0^{-1}$, jolloin ed. lauseesta seuraa, että

$$f : G/H \to G/K$$
$$gH \mapsto gg_0K$$

on jatkuva G-kuvaus.

Nyt myös $K = g_0^{-1} H g_0$, joten ed. lauseen mukaan

$$\bar f : G/K \to G/H$$
$$gK \mapsto gg_0^{-1}H$$

on jatkuva G-kuvaus.

Lisäksi

$$(\bar f \circ f)(gH) = \bar f(gg_0K) = gg_0g_0^{-1}H = gH$$

ja $(f \circ \bar f)(gK) = f(gg_0^{-1}H) = gg_0^{-1}g_0K = gK$.

Siis f on G-homeomorfismi ja $f^{-1} = \bar f$.

"$\Rightarrow$" ol., että $f: G/H \to G/K$ on G-homeomorfismi, merk. $f(eH) = g_0 K$.
Tällöin $G_{eH} = G_{f(eH)}$ Lemman 2.30 nojalla ja

$$H = G_{eH} = G_{g_0 K} = G_{g_0(eK)} = g_0 G_{eK} g_0^{-1} = g_0 K g_0^{-1},$$

eli H ja K ovat konjugoituja. $\square$

Lause 2.34. Olk. G kompakti top. ryhmä, H, K sulj. aliryhmiä, jotka ovat konjugoituja keskenään.
Tällöin jokainen G-kuvaus

$$f: G/H \to G/K$$

on G-homeomorfismi.

Tod. Olk. $f: G/H \to G/K$ G-kuvaus, merk. $f(eH) = g_0 K$.
Siis $H \subset g_0 K g_0^{-1}$.
Olk. $\bar{g} \in G$ s.e. $K = \bar{g} H \bar{g}^{-1}$, jolloin

$$(*) \quad H \subset g_0 K g_0^{-1} = g_0 \bar{g} H \bar{g}^{-1} g_0^{-1} = g_0 \bar{g} H (g_0 \bar{g})^{-1},$$

eli

$$(g_0 \bar{g})^{-1} H (g_0 \bar{g}) \subset H.$$

Koska G on kompakti, seuraa Lemmasta 2.19 nyt, että y.o. inkluusio on yhtäsuuruus ja $(*)$:ssä välttämättä $H = g_0 K g_0^{-1}$ eli $K = g_0^{-1} H g_0$.

Tästä seuraa, että

$$\bar{f}: G/K \to G/H, \quad gK \mapsto g g_0^{-1} H$$

on hyvin määr. jatkuva G-kuvaus.
Nyt $\bar{f} \circ f = id$ ja $f \circ \bar{f} = id$, josta seuraa että f on G-homeomorfismi.

$\square$

Lause 2.35 Olk. G komp. top. ryhmä, H, K sulj. aliryhmiä. Ol., että $\exists$ G-kuvaukset

$$f_1 : G/H \to G/K$$

$$\text{ja} \quad f_2 : G/K \to G/H.$$

Tällöin H ja K ovat konjugoituja ja f_1, f_2 ovat G-homeomorfismeja.

Tod. Olk. $f_1(eH) = g_1 K$ ja $f_2(eK) = g_2 H$. Tällöin $H \subset g_1 K g_1^{-1}$ ja $K \subset g_2 H g_2^{-1}$

eli $g_1^{-1} H g_1 \subset K$ ja $g_2^{-1} K g_2 \subset H$.

Lemman 2.20 nojalla H ja K ovat konjugoituja ja Lauseen 2.34 nojalla f_1 ja f_2 ovat G-homeomorfismeja.

20.10.10. $\rightarrow$

$\square$