0. Ryhmän toiminta joukossa

Määr. Olk. $(G, \cdot)$ ryhmä
X joukko

Ryhmän G toiminta joukossa X on funktio
$$\varphi : G \times X \to X$$
s.e. (1) $\varphi(e, x) = x \quad \forall x \in X$ (e neutr. alkio)
(2) $\varphi(g_2, \underbrace{\varphi(g_1, x)}_{\in X}) = \varphi(\underbrace{g_2 g_1}_{\in G}, x) \quad \forall g_1, g_2 \in G, x \in X.$

Kolmikkoa (X, G, φ) sanotaan transformaatioryhmäksi tai G:n toiminnaksi joukossa X, ja X:ää sanotaan G-joukoksi.
(G-avaruudeksi)

Huom. Funktio $\varphi : G \times X \to X$ määrittelee joukon funktioita
$$\{ \varphi_g : X \to X \mid g \in G \}$$
kaavalla
$$\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$$
ja ehdot (1) ja (2) saavat muodon
(1)' $\varphi_e(x) = x \quad \forall x \in X$ eli $\varphi_e = id_X$
(2)' $\varphi_{g_2}(\varphi_{g_1}(x)) = \varphi_{g_2 g_1}(x)$ eli $\varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1} = \varphi_{g_2 g_1}$.

(Siis: Jokaista G:n alkiota vastaa funktio $X \to X$, e:tä vastaa id_X ja lisäksi ryhmälaskutoimitus vastaa funktioiden yhdistämistä.)

Selvästi jokainen $\varphi_g : X \to X$ on bijektio:
$$\left.\begin{aligned} \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} &\overset{(2)'}{=} \varphi_{gg^{-1}} = \varphi_e \overset{(1)'}{=} id_X \\ \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g &= \varphi_{g^{-1}g} = \varphi_e = id_X \end{aligned}\right\}$$
$\Rightarrow \varphi_g, \varphi_{g^{-1}}$ toistensa käänt. kuv.
$\Rightarrow$ molemmat bij.

Huom. Ellei sekaannuksen vaaraa ole, yleensä merkitään
$$\varphi(g, x) = gx,$$
jolloin ehdot (1) ja (2) saavat muodon
(1)'' $ex = x \quad \forall x \in X$
(2)'' $g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x \quad \forall g_1, g_2 \in G, x \in X.$

Esim. 1) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t,(x,y)) = (x+t, y)$.

2) $Gl(n, \mathbb{R}) = \{$ kääntyvät $\mathbb{R}$-kertoimiset $(n\times n)$-matriisit $\}$

$(Gl(n,\mathbb{R}), \cdot)$ on ryhmä, joka toimii (lineaarikuvauksilla) avaruudessa $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} Gl(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, \bar{x}) &\longmapsto A\bar{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I\bar{x} &= \bar{x} \\ B(A\bar{x}) &= (BA)\bar{x} \end{aligned}$$

3) Jos X on G-avaruus ja $H \le G$, niin X on luonn. tavalla myös H-avaruus:

$$H \times X \hookrightarrow G \times X \to X.$$

Sen sijaan jos $A \subset X$, A ei välttämättä ole G-avaruus, koska voi olla $\varphi(G \times A) \not\subset A$.

ylläolevasta rajoittamalla saadaan, että

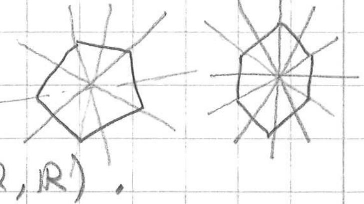
Esim. $\mathbb{R}^n$ on $O(n)$-avaruus ($O(n)$ = ortogonaaliset matriisit)

S^{n-1}, D^n ovat $O(n)$-avaruuksia, (ei $Gl(n,\mathbb{R})$-avaruuksia)

4) n-kulmioiden symmetriaryhmät D_n

" kierrot ja peilaukset

$\# D_n = 2n$, n kpl kiertoja, n kpl peilauksia



Huom. void. ajatella $D_n \le Gl(2,\mathbb{R})$.

5) Galois'n teoria (Alg. II ?):

K, L kuntia, $K \subset L$ (eli L on K:n laajennus)

$\Gamma(L:K) = \{ \theta : L \to L \mid \theta$ K-automorfismi $\}$

↑ eli kuntaisomorfismi $L \to L$ s.e. $\theta|_K = id_K$.

$(\Gamma(L:K), \circ)$ on ryhmä, laajennuksen Galois'n ryhmä.

Tämä ryhmä sisältää hyödyllistä tietoa laajennuksesta $K \subset L$.

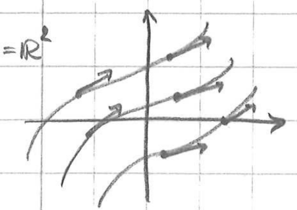
Esim. polynomiyhtälöiden ratkaisukaavat ($\nexists$ yleistä ratk. kaavaa, kun aste ≥ 5)

polynomi $P \rightsquigarrow$ laajennus $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ ryhmä $\Gamma(L:\mathbb{Q})$.

Historiallinen mielenkiinto: ilmeisesti ensimm. kerta, jolloin esiintyi abstraktin ryhmän käsite.

6) Dynaamiset systeemit $\quad (= \text{ryhmän } (\mathbb{R},+) \text{ toiminnat})$



Teoreema a) Olk. $\varphi: \mathbb{R}\times U \to U$ $\mathbb{R}$:n toiminta, $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Ol. että φ:llä on ositt. derivaatta 1. muuttujan suhteen.
Määr. vektorikenttä

$$f: U \to \mathbb{R}^n$$
$$f(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\bar{x})\Big|_{t=0}.$$

Tällöin $\varphi_q : \mathbb{R} \to U$, $\varphi_q(t) := \varphi(t,q)$
on diff. yhtälön

$$\bar{x}' = f(\bar{x})$$

ratkaisu alkuehdolle $\varphi_q(0) = q$.

b) Kääntäen, jos $f: U \to \mathbb{R}^n$ on jatk. vektorikenttä
ja ol. että diff. yhtälöllä

$$\bar{x}' = f(\bar{x})$$

on yksikäsitt. ratkaisu $\varphi_q : \mathbb{R} \to U$ s.e. $\varphi_q(0) = q$ $(\forall q \in U)$,
niin $\varphi: \mathbb{R}\times U \to U$

$$\varphi(t,q) = \varphi_q(t)$$

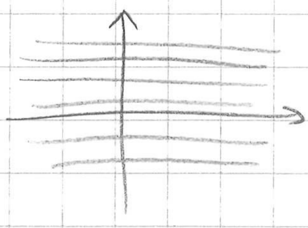
määrittelee $\mathbb{R}$:n toiminnan U:ssa.

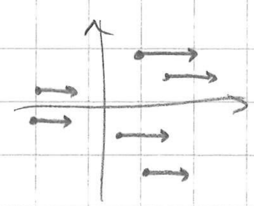
$\square$

Esim. 1) $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t,(x,y)) = (t+x, y)$$

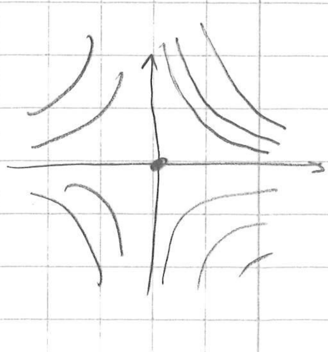
$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,(x,y))\Big|_{t=0} = (1,0)$$





2) diff. yhtälöä $(x,y)' = (x,-y)$
vastaa toiminta $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t,(x,y)) = (e^{t}x, e^{-t}y)$$



(esittele radat!)

Lisäys

Tutkimme lähinnä tilannetta, jossa G on n.s. topologinen ryhmä ja X top. avaruus. Lisävaatimus: $\varphi : G \times X \to X$ on jatkuva. (Huom. tämä ei ole yhtäpitävää sen kanssa että olisi annettu perhe $\{\varphi_g : X \to X \mid g \in G\}$ jatkuvia funktioita!)

I Topologiset ryhmät

Määritelmä ja perusominaisuuksia

Määr. 1.1. Topologinen ryhmä G on ryhmä G, joka on myös topologinen T_1-avaruus s.e. laskutoimitus

$$\mu : G \times G \to G \quad , \quad (g, g') \mapsto gg'$$

ja kuvaus

$$\iota : G \to G \quad , \quad g \mapsto g^{-1}$$

ovat jatkuvia. $\square$

(Siis: $(G, \cdot, \tau)$)

Pal. mieleen: Top. avaruus G on T_1 $\iff$ $\{g\} \in G$ $\forall g \in G$. Joissakin kirjoissa (esim. Kawakubo) vaaditaan, että G on Hausdorff. Kuten kohta näemme, T_1 topologinen ryhmä on aina Hausdorff, vaikka yleisesti Hausd. ehto on vahvempi kuin T_1.

4.9.13

Esim. 1.2. Topologisia ryhmiä:

- $(\mathbb{R}, +)$
- $(\mathbb{R}^n, +)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(S^1, \cdot)$
- mikä tahansa ryhmä + diskreetti topologia

Olk. $M(n, \mathbb{R})$ reaalikertoimisten $(n \times n)$-matriisien joukko. Määr. bijektio

$$\alpha : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

Annetaan joukolle $M(n,\mathbb{R})$ topologia s.e. φ on homeomorfismi:

$$U \underset{\text{avoin}}{\subset} M(n,\mathbb{R}) \overset{\text{määr.}}{\iff} \varphi(U) \underset{\text{avoin}}{\subset} \mathbb{R}^{n^2}.$$

Siten annetaan osajoukolle $Gl(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid \exists A^{-1}\}$

$= \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ relatiivitopologia.

Ei ole vaikea osoittaa, että $\det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on jatkuva, jolloin

$$Gl(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \underset{\text{avoin}}{\subset} M(n,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}.$$

<u>HT</u> $(Gl(n,\mathbb{R}), \cdot)$ on topologinen ryhmä. $\square$

<u>Esim. 1.3.</u> X top. avaruus.

$$\text{Homeo}(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ homeom.}\}$$

$(\text{Homeo}(X), \circ)$ on ryhmä.

Voidaan osoittaa ([Kawakubo, s. 17]), että jos X on kompakti Hausdorff, niin $\text{Homeo}(X)$ varustettuna kompakti-avoin topologialla on topologinen ryhmä. $\square$

Olk. nyt G top. ryhmä, $h \in G$.

Määr.

$$r_h : G \to G, \quad g \mapsto gh$$
$$l_h : G \to G, \quad g \mapsto hg.$$

<u>Lemma 1.4.</u> r_h ja l_h ovat homeomorfismeja.

<u>Tod.</u>
$$r_h : \begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & G \times \{h\} & \xrightarrow{\mu|} & G \\ g & \longmapsto & (g,h) & \longmapsto & gh \end{array}$$
on jatkuva.

Selvästi $r_{h^{-1}} \circ r_h = id_G$ ja $r_h \circ r_{h^{-1}} = id_G$.

Koska $r_{h^{-1}}$ myös on jatkuva, ovat r_h ja $r_{h^{-1}}$ homeomorfismeja.

Vastaavasti l_h.

$\square$

Merkintöjä: Jos $A \subset G$ ja $B \subset G$, merk.

$$AB = \{ gg' \mid g \in A, g' \in B \}.$$

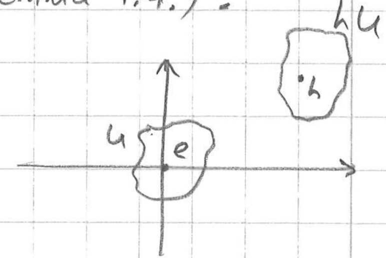
Yleensä lyhennetään $A\{g\} = Ag$ ja $\{g\}B = gB$.

Lisäksi $A^{-1} = \{ g^{-1} \mid g \in A \}$.

Lemma 1.5. Jos $e \in U \overset{\circ}{\subset} G$ ja $h \in G$, niin hU on h:n ympäristö G:ssä. Samoin Uh.

Tod. Koska $e \in U$, niin $h = he \in hU$. Lisäksi $hU = \ell_h(U)$ on avoin G:ssä, koska ℓ_h on homeomorfismi (Lemma 1.4.).
Siis hU on h:n ympäristö.
Vastaavasti Uh.

$\square$



Lemma 1.6. $\iota : G \to G$, $\iota(g) = g^{-1}$ on homeomorfismi.

Tod. ι on jatkuva (top. ryhmän määr.).
Selvästi $\iota \circ \iota = id_G$ eli ι on oma käänt. kuvauksensa,
$\Rightarrow$ väite.

$\square$

Korollaari 1.7. $U \overset{\circ}{\subset} G \Rightarrow U^{-1} = \iota(U) \overset{\circ}{\subset} G$.

$\square$

Lemma 1.8. Olk. $e \in U \overset{\circ}{\subset} G$. Tällöin $\exists$ e:n ympäristöt V s.e. $VV \subset U$ ja W s.e. $WW^{-1} \subset U$. (vrt. metr. av., $\varepsilon/2$)

Tod.

$$G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

Nyt $\mu(e,e) = e$, joten μ:n jatkuvuudesta seuraa, että $\exists$ (e,e):n ymp. V' s.e. $\mu(V') \subset U$. Tunnetusti V' sisältää muotoa $V \times V$ olevan ympäristön. Siis $VV = \mu(V \times V) \subset U$.

Myös kuvaus $G \times G \xrightarrow{id \times \iota} G \times G \xrightarrow{\mu} G$ on jatkuva, ja ympäristö W löytyy vastaavasti.

$\square$

Lause 1.9 Jokainen top. ryhmä on Hausdorffin avaruus.

Tod. Olk. $x, y \in G$, $x \neq y$.
Siis $e \neq x^{-1}y$. Koska G on T_1, on $\{x^{-1}y\} \subset G$ [closed]
eli $U = G \setminus \{x^{-1}y\} \subset G$ [open] on e:n ympäristö.
Nyt 1.8. $\Rightarrow$

$\exists$ e:n ymp. W s.e. $WW^{-1} \subset U$

eli $x^{-1}y \notin WW^{-1}$.

Nyt xW ja yW ovat erilliset:

jos olisi $a \in xW \cap yW$, niin

$a = xw_1$ jollakin $w_1 \in W$ ja

$a = yw_2$ jollakin $w_2 \in W$.

Siis $xw_1 = yw_2$ ja $x^{-1}y = w_1 w_2^{-1} \in WW^{-1}$ RISTIRIITA.

Siis $xW \cap yW = \emptyset$.
Lisäksi xW on x:n ymp. ja yW on y:n ymp. (Lemma 1.5.). $\square$

Aliryhmät

Olk. G top. ryhmä, $H \leq G$.
Annetaan H:lle relatiivitopologia, eli

$$U \subset H \text{ [open]} \iff \exists\ U' \subset G \text{ [open] s.e. } U = U' \cap H.$$

Merk. H_{relG}.

Pidetään seuraavia tuloksia tunnettuina (Topologia II):

Olk. X, Y top.av., $A \subset X$, $B \subset Y$.

a) Olk. $f: X \to Y$ s.e. $f(X) \subset B$.
Tällöin $f: X \to B_{relY}$ jatkuva $\iff$ $f: X \to Y$ jatkuva

b) Jos $f: X \to Y$ on jatkuva, niin $f|: A_{relX} \to Y$ on jatkuva

c) $A_{relX} \times B_{relY} = (A \times B)_{rel(X \times Y)}$ topologisina avaruuksina.

Näistä seuraa helposti, että H_{relG} on topologinen ryhmä (HT).

Esim. 1.10. $(\mathbb{R}, +)$ $\quad \mathbb{Z} \Subset \mathbb{R}$; $\mathbb{Q}$ ei avoin, ei sulj.

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ $\quad]0, \infty[$ avoin ja suljettu aliryhmä

9.9.10 →

$$\mathcal{O}(n) = \{ A \in Gl(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = I \} \Subset Gl(n, \mathbb{R}) :$$

Tark. funktiota $\varphi : Gl(n, \mathbb{R}) \to Gl(n, \mathbb{R})$

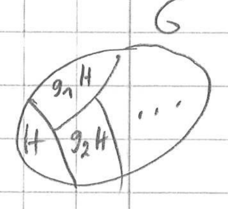
$$A \longmapsto A^t A$$

Selvästi φ on jatkuva:

$$Gl(n, \mathbb{R}) \to Gl(n, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n, \mathbb{R})$$

$$A \longmapsto (A^t, A) \longmapsto A^t A$$

Nyt $\mathcal{O}(n) = \varphi^{-1} \underbrace{\{I\}}_{\text{sulj.}}$ on suljettu. □



Lause 1.11. Jokainen avoin aliryhmä on myös suljettu.

Tod. Olk. $H \Subset G$.

Nyt Lemma 1.5. $\Rightarrow$ $gH \Subset G \quad \forall g \in G$.

koska

$$G \setminus H = \bigcup_{g \in G \setminus H} gH \Subset G,$$ on siis $H \Subset G$.

□

Lause 1.12. Olk. G top. ryhmä, $H \leq G$. Tällöin $\overline{H} \leq G$.

↑ sulkeuma

Tod. On siis osoitettava, että

$$\mu(\overline{H} \times \overline{H}) \subset \overline{H}$$

ja $\iota(\overline{H}) \subset \overline{H}$.

koska $H \leq G$, tiedetään $\mu(H \times H) \subset H$ ja $\iota(H) \subset H$.

Nyt $\mu(\overline{H} \times \overline{H}) = \mu(\overline{H \times H}) \underset{\uparrow\ \mu \text{ jatkuva}}{\subset} \overline{\mu(H \times H)} \subset \overline{H}$

ja $\iota(\overline{H}) \underset{\uparrow\ \iota \text{ homeom.}}{=} \overline{\iota(H)} \subset \overline{H}$

Lisäksi $e \in H \subset \overline{H}$.

□

Siis $\overline{H}$ on G:n sulj. aliryhmä ja itsekin top. ryhmä.

8.9.16 →

Neutraalialkion komponentti G_0

Lause 1.13. Olk. G top. ryhmä ja G_0 se G:n yhtenäinen komponentti, joka sisältää e:n. Tällöin G_0 on G:n suljettu normaali aliryhmä.

Tod. Topologia II $\Rightarrow$ G_0 on suljettu.
Selvästi $e \in G_0$, joten on osoitettava, että
$$\mu(G_0 \times G_0) \subset G_0$$
ja
$$\iota(G_0) \subset G_0 .$$

Nyt $G_0 \times G_0$ on yhtenäinen, joten $\mu(G_0 \times G_0)$ on yhtenäinen koska μ on jatkuva. Koska $e = \mu(e,e) \in \mu(G_0 \times G_0)$, niin välttämättä $\mu(G_0 \times G_0)$ sisältyy komponenttiin G_0. Siis $\mu(G_0 \times G_0) \subset G_0$.

Vastaavasti tod., että $\iota(G_0) \subset G_0$.

$\therefore$ G_0 on aliryhmä.

Normaalisuus: väite $gG_0g^{-1} \subset G_0 \quad \forall g \in G$

tod. olk. $g \in G$ ja tark. kuvausta
$$\gamma : G \to G$$
$$g' \mapsto gg'g^{-1} .$$
Nyt γ on jatkuva joten $\gamma(G_0)$ on yhtenäinen. Koska $e = \gamma(e) \in \gamma(G_0)$, niin välttämättä $\gamma(G_0) \subset G_0$ eli $gG_0g^{-1} \subset G_0$. $\square$

$\square$ Lause 1.13.

Esim.
- $]0,\infty[\subset (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$
- $S^1 \times \mathbb{Z}$
- void. os., että $Gl(n,\mathbb{R})$:llä on kaksi komponenttia: $\underbrace{\{A \mid \det(A) > 0\}}_{= G_0}$ ja $\{A \mid \det(A) < 0\}$.

5.9.13 $\longrightarrow$

Tekijäavaruus G/H

Olk. G top. ryhmä ja $H \leq G$.

Kertausta: $G/H = \{ gH \mid g \in G \}$ vasemmanpuol. sivuluokkien joukko

Merk. $\pi : G \to G/H$ projektio
$g \mapsto gH$

Joukko G/H voidaan ajatella myös ekvivalenssiluokkien joukkona, kun määr. G:ssä ekviv. relaatio $\sim$:

$$\begin{aligned} a \sim b &\Leftrightarrow b^{-1}a \in H \\ &\Leftrightarrow a^{-1}b \in H \\ &\Leftrightarrow \exists\, h \in H \text{ s.e. } a^{-1}b = h \\ &\Leftrightarrow \exists\, h \in H \text{ s.e. } b = ah. \end{aligned}$$

Siis ekviv. luokka $[a] = aH = \{ ah \mid h \in H \}$.

Annetaan G/H:lle tekijätopologia projektion $\pi : G \to G/H$ avulla:

$$U \circledcirc G/H \overset{\text{määr.}}{\Leftrightarrow} \pi^{-1}(U) \circledcirc G.$$

Lemma 1.14. π on jatkuva ja avoin kuvaus.

Tod. Tekijätopologian määr. $\Rightarrow$ π on jatkuva

π avoin: olk. $V \circledcirc G$. väite: $\pi(V) \circledcirc G/H$

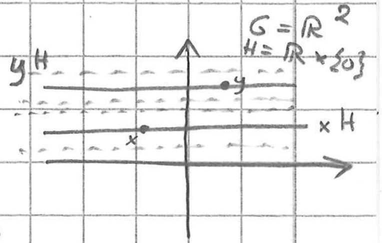
Tutkitaan joukkoa
$$\pi^{-1}(\pi(V)) \overset{(*)}{=} VH = \bigcup_{h \in H} Vh.$$

Koska $V \circledcirc G$, on $Vh \circledcirc G$ $\forall h$, ja $\bigcup_{h\in H} Vh \circledcirc G$.
Siis $\pi^{-1}(\pi(V)) \circledcirc G$, joten
tekijätop. määr. $\Rightarrow$ $\pi(V) \circledcirc G/H$.

$$\left[(*):\quad \begin{aligned} g \in \pi^{-1}\pi V &\Leftrightarrow \pi(g) \in \pi(V) \\ &\Leftrightarrow gH = vH \text{ jollakin } v \in V \\ &\Leftrightarrow g \in vH \text{ jollakin } v \in V \\ &\Leftrightarrow g \in VH. \end{aligned} \right]$$

$\square$

Teoreema 1.15. Olk. G top. ryhmä, $H \leq G$.
Seur. ehdot ovat yhtäpitäviä:
(1) H on suljettu
(2) G/H on Hausdorff
(3) G/H on T_1.



Tod. $(1) \Rightarrow (2)$: Olk. $xH, yH \in G/H$, $xH \neq yH$.

Siis $x \notin yH$ ja koska $H \Subset G$, myös $yH \Subset G$.
Siis $\exists$ x:n ymp. U' s.e. $U' \cap yH = \emptyset$.
Tällöin $U = U'x^{-1}$ on e:n ympäristö ja koska $Ux = U'$,
niin $$Ux \cap yH = \emptyset. \quad (*)$$
Vastaavasti kuten Lemmassa 1.8. void. löytää e:n ymp. W
s.e. $$W^{-1}W \subset U.$$

Os., että $$WxH \cap WyH = \emptyset: \quad (**)$$
antiteesi: $\exists$ $b \in WxH \cap WyH$, jolloin
$b = w_1 x h_1 = w_2 y h_2$ joillakin $w_1, w_2 \in W$, $h_1, h_2 \in H$.

Siis $w_2^{-1} w_1 x = y h_2 h_1^{-1}$, mutta
$w_2^{-1} w_1 x \in W^{-1}Wx \subset Ux$ ja
$y h_2 h_1^{-1} \in yH$, RISTRIITA $(*)$:n kanssa.
Siis $(**)$ on voimassa.

Määr. $W_1 = \pi(Wx)$, $W_2 = \pi(Wy)$,
jotka ovat avoimia G/H:ssa Lemman 1.14 nojalla.
Ne ovat siis ympäristöt G/H:n alkioille $\pi(x) = xH$ ja $\pi(y) = yH$.
Lisäksi $W_1 \cap W_2 = \emptyset$:
Nyt $\pi^{-1}(W_1) = WxH$ ja $\pi^{-1}(W_2) = WyH$ (vrt. ed. Lemman tod.),
π on surjektio ja $WxH \cap WyH = \emptyset$, on välttämättä
myös $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

13.9.10 →

$(2) \Rightarrow (3)$: selvä.

$(3) \Rightarrow (1)$: $$H = \pi^{-1}(\underbrace{\{eH\}}_{\text{suljettu } G/H\text{:ssa } T_1\text{-ehdon nojalla}}) \Subset G.$$

$\square$

Tekijäryhmät

Ol., että G on top. ryhmä ja H suljettu normaali aliryhmä. Tällöin G/H on ryhmä varustettuna laskutoimituksella $(gH)(g'H) = (gg')H$.

Teoreema 1.16. Y.o. oletuksin G/H on topologinen ryhmä.

Tarvitsemme topologisia aputuloksia:

Lemma 1.18. Jos kaavio

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \\ Y \arrow[r, "\tilde{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

kommutoi, π on $\underbrace{\text{samastuskuvaus}}_{=\text{tekijäkuvaus}}$ ja f on jatkuva, niin $\tilde{f}$ on jatkuva.

Tod. olk. $U \circledcirc Z$. On os., että $\tilde{f}^{-1}U \circledcirc Y$.

Nyt

$$\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}U) = f^{-1}U \circledcirc X, \text{ koska } f \text{ on jatkuva}$$

π samastuskuvaus $\Rightarrow \tilde{f}^{-1}U \circledcirc Y$. $\square$

Lemma 1.19. Jos $\pi : X \to Y$ on avoin, niin $\pi \times \pi : X \times X \to Y \times Y$ on avoin.

Tod. HT.

$\square$

Pal. mieleen (Top. II) Olk. X, Y top. avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on samastuskuvaus (= tekijäkuvaus), jos
1) f on surjektio
2) f koinduoi Y:hyn sen alkuperäisen topologian, eli
$$V \circledcirc Y \iff f^{-1}V \circledcirc X.$$

Esim. $\pi : G \to G/H$ on samastuskuvaus

Lause 1.17. Olk. $f : X \to Y$ jatk. surjektio. Jos f on avoin tai suljettu kuvaus, niin f on samastuskuvaus.

Tod. Top. II, Lause 8.9.

$\square$

Tod. (1.16)

Teoreeman 1.15 nojalla G/H on Hausdorff.

Merk. $\mu' : G/H \times G/H \to G/H$

$$(gH, g'H) \mapsto (gg')H$$

ja tark. kaaviota

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "\mu'"'] & G/H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,g') \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & gg' \arrow[d, mapsto] \\ (gH, g'H) \arrow[r, mapsto] & (gg')H \end{tikzcd}$$

joka kommutoi.

Nyt $1.14. \Rightarrow \pi$ avoin $\overset{1.19.}{\Longrightarrow} \pi \times \pi$ avoin $\overset{1.17.}{\Longrightarrow} \pi\times\pi$ samastuskuv.

$\overset{1.18.}{\Longrightarrow} \mu'$ on jatkuva. (Lemman 1.18. f on tässä $\pi \circ \mu$).

Vastaavasti $\imath' : G/H \to G/H$

$$gH \mapsto g^{-1}H$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "\imath'"'] & G/H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g^{-1} \arrow[d, mapsto] \\ gH \arrow[r, mapsto] & g^{-1}H \end{tikzcd}$$

kaavio kommutoi, π on tekijäkuvaus $\Rightarrow \imath'$ on jatkuva.

□

Kompakteista ja lokaalisti kompakteista ryhmistä

Teoreema 1.20. Olk. G kompakti top. ryhmä ja H sulj. aliryhmä. Tällöin H on kompakti top. ryhmä ja tekijäavaruus G/H on kompakti. Jos H on sulj. normaali aliryhmä, niin G/H on kompakti top. ryhmä.

Tod. G komp., H sulj. $\Rightarrow H$ komp.
H top. ryhmä ok

G komp., π jatkuva $\Rightarrow G/H = \pi(G)$ kompakti.

H sulj. normaali alir. $\overset{1.16}{\Longrightarrow} G/H$ top. ryhmä.

□

Lause 1.21. Top. ryhmä G on lok. kompakti $\Leftrightarrow$ neutraalialkiolla on olemassa ympäristö, jonka sulkemma on kompakti.

Tod. Olk. $g \in G$ ja U e:n ympäristö, $\bar{U}$ kompakti.
Tällöin
$$gU = l_g(U) \text{ on } g\text{:n ympäristö}$$
ja
$$\overline{l_g(U)} = l_g(\bar{U}) \text{ on kompakti, koska } l_g \text{ on homeomorfismi.}$$
$\square$

Teoreema 1.22. Olk. G lokaalisti kompakti top. ryhmä, H suljettu aliryhmä. Tällöin H on lokaalisti kompakti top. ryhmä ja G/H on lokaalisti kompakti.
Jos H on sulj. normaali aliryhmä, niin tekijäryhmä G/H on lokaalisti kompakti.

Tod. HT

$\square$

Tekijäryhmä G/G_0

Aiemmin todistetun nojalla G/G_0 on top. ryhmä (1.13 & 1.16).

Lemma 1.23. Olk. X, Y top. avaruuksia ja $f : X \to Y$ samastuskuvaus.
Jos Y ja jokainen $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, ovat yhtenäisiä, niin X on yhtenäinen.

Tod. HT

$\square$

Teoreema 1.24. Top. ryhmä G/G_0 on täysin epäyhtenäinen (eli komponentit ovat yksiöitä).

Tod. Tiedämme (1.14), että $\pi : G \to G/G_0$ on avoin kuvaus.
Olkoon Y G/G_0:n yhtenäinen osajoukko.
Osoitetaan, että Y on yksiö.

Os. ensin, että $\pi| : \pi^{-1}(Y) \to Y$ on avoin kuvaus.
Joukon $\pi^{-1}(Y)$ avoin osajoukko on muotoa $U \cap \pi^{-1}(Y)$, missä $U \Subset G$.
Nyt

$$\pi(U \cap \pi^{-1}(Y)) = \pi(U) \cap Y.$$

Lisäksi $\pi(U) \Subset G/G_0$, koska π on avoin kuvaus, joten $\pi(U) \cap Y \Subset Y$.
Siis $\pi|$ on avoin kuvaus ja surjektio, joten se on samastuskuvaus.

Jokainen $\pi^{-1}(y)$, $y \in Y$ on muotoa gG_0 jollakin $g \in G$, joten se on yhtenäinen, koska G_0 on yhtenäinen. Koska lisäksi Y on yhtenäinen, niin Lemma 1.23 $\Rightarrow$ $\pi^{-1}(Y)$ on yhtenäinen.

Jokainen G:n komponentti on muotoa gG_0 jollakin $g \in G$:
jos A on komponentti ja $g \in A$, niin $g^{-1}A$ on komponentti ja $e = g^{-1}g \in g^{-1}A$. Siis $g^{-1}A = G_0$ ja $A = gG_0$.
Koska $\pi^{-1}(Y)$ on yhtenäinen, on siis $\pi^{-1}(Y) \subset gG_0$ jollakin $g \in G$.
Siis

$$Y = \pi(\pi^{-1}(Y)) \subset \pi(gG_0) = \{\pi(g)\}$$ eli Y on yksiö. $\square$

9.9.13 →

Lause 1.25. Jos G on lokaalisti yhtenäinen top. ryhmä, niin G/G_0 on diskreetti.

Tod. HT. $\square$

15.9.10 →

Esimerkkejä matriisiryhmistä

$Gl(n,\mathbb{R})$ on topologinen ryhmä (tod. aiemmin)
$\Subset M(n,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ "general linear group"

$O(n) = \{A \in Gl(n,\mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$ "orthogonal group"
" = etäisyydet säilyttävät lin. kuvaukset = kierrot, peilaukset ~~ja näiden yhdisteet~~ "

$Sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in Gl(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ "special linear group"

$SO(n) = O(n) \cap Sl(n,\mathbb{R})$ "special orthogonal group"

Topologisten ryhmien suorat ja puolisuorat tulot

Lause 1.26. Olk. G_1, G_2 top. ryhmiä. Määritellään (karteesiseen) tuloon $G_1 \times G_2$ laskutoimitus kaavalla $(g_1, g_2)\cdot(g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2')$ ja annetaan $(G_1 \times G_2)$:lle tulotopologia.
Tällöin $G_1 \times G_2$ on topologinen ryhmä, ryhmien G_1 ja G_2 <u>suora tulo</u>.

<u>Tod.</u> Seuraa kohta esitettävästä yleisemmästä lauseesta. □

Olk. N ja H top. ryhmiä ja olkoon $\varphi^*: H \times N \to N$ H:n jatkuva toiminta N:ssä automorfismeilla, eli
1) φ^* on jatkuva
2) $e_H n = n \quad \forall n \in N$
$h_2(h_1 n) = (h_2 h_1) n \quad \forall h_1, h_2 \in H, n \in N$ } "ryhmän toiminta joukossa"
3) Jokainen $\varphi_h^*: N \to N$ on N:n automorfismi, eli homeomorfismi ja ryhmäisomorfismi.

<u>Esim.</u> $H = \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$
$N = SO(n)$
toiminta $\mathbb{Z}_2 \times SO(n) \to SO(n)$
$(1, A) \longmapsto A$
$(-1, A) \longmapsto BAB^{-1}$, missä $B = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$.

<u>Huom.</u> φ^* voidaan taas ajatella funktiona
$$\varphi: H \to Aut(N), \quad \varphi(h)(n) = \varphi^*(h, n)$$
eli jokaista H:n alkiota vastaa jokin N:n automorfismi.
Ehdot 2) tarkoittavat että φ on homomorfismi $H \to (Aut(N), \circ)$.

Määritellään nyt ryhmien N ja H <u>puolisuora tulo</u>
$$N \rtimes_\varphi H$$
(tai yksinkertaisemmin $N \rtimes H$, jos φ on asiayhteydestä selvä):

Topologisena avaruutena $N \rtimes H$ on $N \times H$ tulotopologialla varustettuna. Laskutoimitus määritellään kaavalla

$$(n,h) * (n',h') = (n \underbrace{\varphi^*(h,n')}_{\in N}, hh') \in N \times H.$$

Huom. jos H toimii N:ssä triviaalisti, eli $\varphi^*(h,n') = n'$ $\forall h \in H$, $n' \in N$, niin saadaan suora tulo.

Lause 1.27. Joukko $N \rtimes_\varphi H$ tulotopologialla ja laskutoimituksella $*$ varustettuna on topologinen ryhmä.

Tod. HT

$\square$

Huom. Lause 1.26 seuraa lauseesta 1.27., koska suora tulo on puolisuoran tulon erikoistapaus.

Lause 1.28. Joukko $\tilde{N} = \{(n, e_H) \in N \rtimes H \mid n \in N\}$ on $N \rtimes H$:n suljettu normaali aliryhmä ja kuvaus

$$i : N \to \tilde{N}$$
$$n \mapsto (n, e_H)$$

on top. ryhmien isomorfismi.

Tod.
- $\tilde{N} = N \times \{e_H\} \in N \times H$ selvä
- $(e_N, e_H) \in \tilde{N}$
- $(n, e_H) * (n', e_H) = (n \underbrace{\varphi^*(e_H, n')}_{=n'}, e_H e_H) \in \tilde{N}$
- $(n, e_H)^{-1} = (n^{-1}, e_H) \in \tilde{N}$

} aliryhmä

- normaalius: HT
- selvästi i on jatkuva bijektio, ja $i^{-1} = (pr_1 : N \times H \to N)|$ on jatkuva
- i homomorfismi:

$$i(n_1 n_2) = (n_1 n_2, e_H)$$
$$i(n_1) * i(n_2) = (n_1, e_H) * (n_2, e_H)$$
$$= (n_1 \underbrace{\varphi^*(e_H, n_2)}_{= n_2}, e_H) \quad \text{ok.}$$

$\square$

Lause 1.29. Kuvaus
$$q : N \rtimes H \to H, \quad (n,h) \longmapsto h$$
on jatkuva surjektiivinen homomorfismi, jolle $\ker q = \tilde{N}$.

Tod.
- jatkuvuus ok. (projektio)
- surj. ok.
- homomorfismi:
$$q\big((n,h) * (n',h')\big) = q(\ldots, hh') = hh'$$
$$q(n,h) \cdot q(n',h') = hh'$$
- $(n,h) \longmapsto e_H \iff (n,h) = (n, e_H)$ jollakin $n \in N$ $\iff (n,h) \in \tilde{N}$.

$\square$

Lause 1.30. Kuvaus
$$\sigma : H \to N \rtimes H, \quad h \longmapsto (e_N, h)$$
on jatkuva homomorfismi, ja $q \circ \sigma = id_H$.

Tod.
- jatk. ok.
- homomorfismi
$$\sigma(h_1 h_2) = (e_N, h_1 h_2)$$
$$\sigma(h_1) * \sigma(h_2) = (e_N, h_1) * (e_N, h_2) = (e_N \underbrace{\varphi^*(h_1, e_N)}_{= e_N}, h_1 h_2) \quad \text{ok.}$$
- $q \circ \sigma(h) = q(e_N, h) = h$ ok.

$\square$

Lause 1.31. $(N \rtimes H)/\tilde{N} \cong H$ topologisina ryhminä.

Tod. HT

$\square$

Esim. 1.32. D_n n-kulmion symmetriat, R_n –"– kierrot. Joukkoina voidaan ajatella $D_n \approx R_n \times \mathbb{Z}_2$

$D_n \cong R_n \rtimes \mathbb{Z}_2 \quad (D_n \ncong R_n \times \mathbb{Z}_2)$

$O(n) \cong SO(n) \rtimes \mathbb{Z}_2$, yksityiskohdat myöhemmin.

Kalvo

Ryhmien eksakti jono:

$$\cdots \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

Jono ryhmiä ja homomorfismeja on eksakti kohdassa G_n, jos

$$\operatorname{im} f_{n-1} = \ker f_n .$$

Jono on eksakti, jos se on eksakti jokaisessa kohdassa.

Muotoa $1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$ (1 = triviaali ryhmä) olevaa eksaktia jonoa sanotaan lyhyeksi eksaktiksi jonoksi.

Esim. 1.33. 1)

$$1 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$
$$n \longmapsto n \longmapsto n_2$$

2) tai yleisemmin jos $H \lhd G$ (normaali aliryhmä)

$$1 \longrightarrow H \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow 1 .$$

3) Yllä olevassa tilanteessa

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & N \rtimes H \arrow[r, "q"] & H \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma"] & 1 \end{tikzcd}$$

- i injektio ok.
- $\operatorname{im} i = \tilde{N} = \ker q$ ok.
- q surjektio ok.

Lisäksi oli määr. $\sigma: H \to N \rtimes H$ s.e. $q \circ \sigma = \mathrm{id}_H$. $\square$

Lyhyttä eksaktia jonoa

$$1 \to N \to G \xrightarrow{p} H \to 1$$

sanotaan halkeavaksi, jos $\exists$ homomorfismi $s: H \to G$ s.e. $p \circ s = \mathrm{id}_H$.

Siis esimerkin 3) jono on halkeava.
(Esimerkin 1 ei ole)

jokaisella $h \in H$ funktio s "valitsee" yhden alkion alkukuvasta $p^{-1}(h)$.

20.3.10

Siis aina puolisuora tulo ⇝ halkeava jono.
Osoitamme, että myös käänteinen konstruktio onnistuu:

Teoreema 1.34. Olk. $1 \to N \hookrightarrow G \xrightarrow{p} H \to 1$ halkeava lyhyt eksakti jono. Tällöin on olemassa H:n jatkuva toiminta φ^* N:ssä (automorfismeilla) s.e.

$$G \cong N \rtimes_{\varphi} H \quad \text{topologisina ryhminä.}$$

Tod. Olk. $s : H \to G$ jatkuva homomorfismi s.e. $p \circ s = id_H$.
Määr.

$$\varphi : H \to Aut(N)$$

seuraavasti: olk. $h \in H$. Määritellään $\varphi(h) : N \to N$ kaavalla

$$\varphi(h)(n) = \underbrace{s(h)}_{\in G}\, n\, \underbrace{s(h)^{-1}}_{\in G} \quad \forall n \in N.$$

Koska N on normaali G:ssä, niin $s(h) n s(h)^{-1} \in N$ ok.
$(N = \ker(p))$

Väite 1a. $\varphi(h)$ on ryhmäisomorfismi:

- $\varphi(h)(nn') = s(h) nn' s(h)^{-1} = s(h) n s(h)^{-1} s(h) n' s(h)^{-1}$
  $= (\varphi(h)(n))(\varphi(h)(n'))$.
- Selvästi $\varphi(h^{-1}) \circ \varphi(h) = id_N = \varphi(h) \circ \varphi(h^{-1})$

Siis $\varphi(h)$ ryhmäisom., käänteiskuvauksenaan $\varphi(h^{-1})$. □ 1a.

Väite 1b. $\varphi(h) : N \to N$ on homeomorfismi:

- $\varphi(h) : n \mapsto s(h) n s(h)^{-1}$ (h kiinteä) jatkuva ok.
- 1a. ⇒ bijektio
- käänteiskuvaus $\varphi(h^{-1})$ myös jatkuva. □ 1b.

Nyt 1a. & 1b. ⇒ $\varphi(h) \in Aut(N)$.

Väite 2. $\varphi : H \to Aut(N)$ on homomorfismi
eli $\varphi(hh_1) = \varphi(h) \circ \varphi(h_1) \quad \forall h, h_1 \in H$:

$$\varphi(hh_1)(n) = s(hh_1) n s(hh_1)^{-1} = s(hh_1) n s(\overbrace{(hh_1)^{-1}}^{= h_1^{-1} h^{-1}})$$
$$= \underbrace{s(h) \underbrace{s(h_1) n s(h_1)^{-1}}_{\varphi(h_1)(n)} s(h)^{-1}}_{\varphi(h)(\varphi(h_1)(n))} = (\varphi(h) \circ \varphi(h_1))(n).$$

□ 2.

Väite 3. $\varphi^*: H \times N \to N$
$$(h,n) \mapsto \varphi(h)(n) = s(h)\, n\, s(h)^{-1}$$ on jatkuva:

s jatk., i jatk., μ jatk. $\Rightarrow$ väite. $\square$ 3.

11.9.13 $\longrightarrow$

Siis voidaan muodostaa puolisuora tulo $N \rtimes_\varphi H$.
Os. vielä, että $N \rtimes H \cong G$.

Määritellään $\gamma: N \rtimes_\varphi H \to G$
kaavalla
$$\gamma(n,h) = n\, s(h).$$

Väite 4. γ on jatkuva homomorfismi:

- γ on yhdistetty kuvaus
$$N \times H \xrightarrow{\mathrm{id}\times s} N \times G \xrightarrow{\mu} G$$
$$(n,h) \longmapsto (n, s(h)) \mapsto n s(h).$$
- homomorfismi:
$$\gamma((n,h) * (n',h')) = \gamma(n\, \varphi(h)(n'), hh')$$
$$= n\, \varphi(h)(n')\, s(hh') = n\, s(h)\, n'\, s(h)^{-1} s(h) s(h')$$
$$= n\, s(h)\, n'\, s(h') = \gamma(n,h)\, \gamma(n',h'). \quad \square\ 4.$$

Määritellään sitten $\beta: G \to N \rtimes_\varphi H$
kaavalla
$$\beta(g) = (\underbrace{g \cdot s(p(g))^{-1}}_{\in N\,?}, \underbrace{p(g)}_{\in H})$$

Koska $N = \ker p$, riittää osoittaa, että $p(g \cdot s(p(g))^{-1}) = e_H$:
$$\underbrace{p(g \cdot s(p(g))^{-1})}$$
$$= p(g)\, p(s(p(g))^{-1}) = p(g) [\underbrace{p(s(p(g)))}_{\mathrm{id}}]^{-1}$$
$$= p(g)\, p(g)^{-1} = e_H.$$

Siis $\beta(g) \in N \times H$.

<u>Väite 5.</u> β on jatkuva ja $\beta = \gamma^{-1}$:

β on jatkuva ok.

$\beta = \gamma^{-1}$: $\quad (\beta \circ \gamma)(n,h) = \beta(n\,s(h))$

$$= \Big(n \cdot s(h) \cdot s\big(p(n\,s(h))\big)^{-1},\ p(n\,s(h))\Big)$$

$$= \Big(n \cdot s(h) \cdot s\big(\underbrace{p(n)}_{e_H}\underbrace{p(s(h))}_{id}\big)^{-1},\ \underbrace{p(n)}_{e_H}\,\underbrace{p(s(h))}_{id}\Big)$$

$$= \big(n \cdot s(h) \cdot s(h)^{-1},\ h\big) = (n,h).$$

$$(\gamma \circ \beta)(g) = \gamma\big(g \cdot s(p(g))^{-1},\ p(g)\big)$$

$$= g \cdot s(p(g))^{-1} s(p(g)) = g. \qquad \square\ 5.$$

Siis γ on ryhmien isomorfismi, γ jatkuva ja $\gamma^{-1} = \beta$ jatkuva, eli γ on top. ryhmien isomorfismi.

$\square$ Teoreema 1.34.

Y.o. tilanne voidaan esittää kaaviona

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, "i"', "\cong"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"', "\cong"] & H \arrow[r] \arrow[d, "id"', "\cong"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \tilde{N} \arrow[r, hook] & N \rtimes_\varphi H \arrow[r, "q"] & H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

.

← Esim.

<u>1.35. Esimerkki matriisiryhmistä</u>

Tark. ortogonaalista ryhmää $O(n)$: Jos $A \in O(n)$, on siis $A^t A = I$ ja

$$\det(A^t A) = \det(I) = 1$$
$$\shortparallel$$
$$\det(A^t)\det(A) = \det(A)^2$$

$\Rightarrow \det(A) = \pm 1$.

Koska $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, niin

$$(*) \qquad \det : O(n) \longrightarrow \{1,-1\} \cong \mathbb{Z}_2$$

on jatkuva homomorfismi.

Nyt $SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det(A) = 1 \}$,
niin $SO(n)$ on jatkuvan homomorfismin $(*)$ ydin,
ja $SO(n)$ on siis $O(n)$:n suljettu normaali aliryhmä.

Saadaan lyhyt eksakti jono

$$(**) \qquad 1 \longrightarrow SO(n) \xhookrightarrow{i} O(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

Eksaktisuus kohdassa $\mathbb{Z}_2$ seuraa siitä, että $\det : O(n) \to \mathbb{Z}_2$ on surjektio: esim.

$$\det(I) = 1, \quad \det\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Määr. sitten $s : \mathbb{Z}_2 \to O(n)$

$$s(a) = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

jolloin s on jatkuva homomorfismi ja $\det \circ s = id_{\mathbb{Z}_2}$;

siis jono $(**)$ on halkeava ja Teoreemasta 1.34

saadaan, että

$$O(n) \cong SO(n) \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2.$$

Tässä $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to Aut(SO(n))$

$$\varphi(a)(B) = s(a) B s(a)^{-1}, \quad a \in \mathbb{Z}_2, \ B \in SO(n)$$

kuten Teoreeman 1.34 todistuksessa.

Lisäksi Lause 1.31 $\Rightarrow$ $O(n)/SO(n) \cong \mathbb{Z}_2$.

22.9.10 $\longrightarrow$

$\square$

Lien ryhmistä

[A. Baker: Matrix Groups, an introduction to Lie group theory, Springer Undergraduate Math. Series]

Määr. 1.36.

sileä kuvaus: olk. $V_1 \Subset \mathbb{R}^{n_1}$, $V_2 \Subset \mathbb{R}^{n_2}$ $\quad (n_1, n_2 \geq 1)$
kuvaus $g: V_1 \to V_2$ on <u>sileä</u>, jos se on ∞ kertaa differentioituva, eli jokaisella komponenttifunktiolla $\exists$ kaikkien kertalukujen ositt. derivaatat.

diffeomorfismi: sileä bijektio g on <u>diffeomorfismi</u>, jos $g^{-1}: V_2 \to V_1$ on sileä.

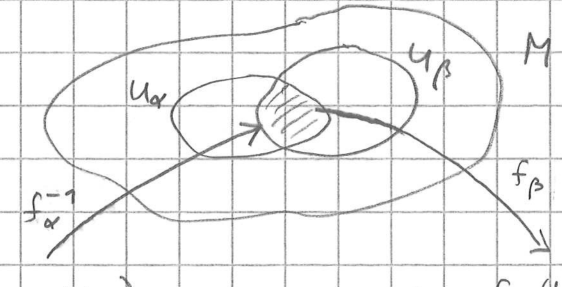
Olk. nyt M ~~separoituva~~ N_2 Hausdorff top. av., $n \geq 1$.

Kuva: S^2

Jos $U \Subset M$ ja $V \Subset \mathbb{R}^n$, niin homeomorfismia $f: U \to V$ sanotaan U:n <u>n-kartaksi</u>.
Jos $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ on M:n avoin peite ja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha, \alpha \in A\}$ on kokoelma n-karttoja, niin $\mathcal{F}$ on <u>atlas</u> (l. kartasto) M:lle, jos

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

on diffeomorfismi $\forall \alpha, \beta$ joilla $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.



(oikeammin: $f_\beta|$ jne...)

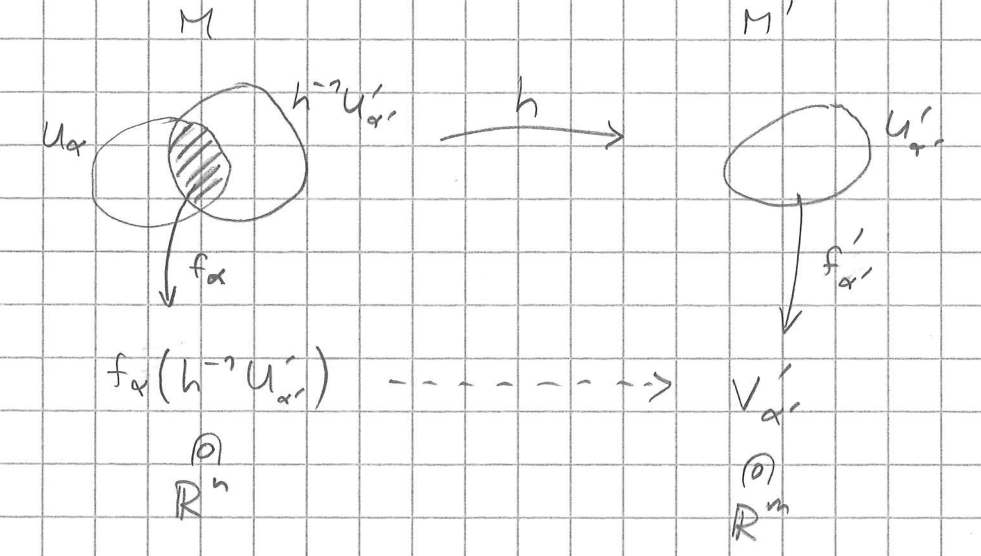
$$\mathbb{R}^n \supset f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow[f_\beta \circ f_\alpha^{-1}]{} f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

Kolmikko $(M, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ on <u>sileä</u> (n-ulott.) <u>monisto</u>.

Määr. 1.37. Olk. $(M, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ ja $(M', \mathcal{U}', \mathcal{F}')$ sileitä monistoja (ei välttämättä sama dimensio) ja $h : M \to M'$ jatkuva kuvaus. Kuvaus h on *sileä*, jos

$$f'_{\alpha'} \circ h \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(h^{-1}U'_{\alpha'}) \longrightarrow V'_{\alpha'} = f'_{\alpha'}(U'_{\alpha'})$$

on sileä $\forall$ parilla α, α', joilla $h(U_\alpha) \cap U'_{\alpha'} \neq \emptyset$.



Määr. 1.38. Olk. G sileä monisto, joka on myös topologinen ryhmä. (Tuloavaruudelle $G \times G$ voidaan luonn. tavalla määritellä sileän moniston struktuuri). Sanomme, että G on *Lien ryhmä*, jos $\mu : G \times G \to G$ ja $\iota : G \to G$ ovat sileitä kuvauksia.

Esim. 1.39.
- $(\mathbb{R}^n, +)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(Gl(n, \mathbb{R}), \cdot)$

Teoreema: Lien ryhmän suljettu aliryhmä on Lien ryhmä.

- $(S^1, \cdot)$
- $O(n)$, $Sl(n, \mathbb{R})$, $SO(n)$

Esim. 1.40. Lok. komp. topologinen ryhmä, joka ei ole Lien ryhmä eikä diskreetti:

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$$

(numeroituva tulo ryhmistä $\mathbb{Z}_2$, $\cong$ Cantorin joukko)