

Parakompaktisuus

A7

Määritellään ensin muutamia peitteisiin liittyviä käsitteitä:

Määr. 1.1. Olk.  $X$  avaruus. Perhe  $(A_j)_{j \in J}$   $X$  in osajoukkoja on lokaalisti äärellinen, jos  $\forall x \in X$   $\exists$  ymp.  $U_x$  s.e.  $U_x \cap A_j \neq \emptyset$  vain äärellisen monella indeksillä  $j$ .  
Perhe  $(A_j)_{j \in J}$  on pisteäärellinen (point-finite), jos  $\forall x \in X$ :  $x \in A_j$  vain äärell. monella indeksillä  $j$ .

Selvästi lokaalisti äärell. perhe on pisteäärellinen.

- Esim. • perhe  $\{[-n, n] \mid n \in \mathbb{N}\}$  ei ole pisteäärellinen.  
• perhe  $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$  on pisteäärellinen, mutta ei lok. äärellinen.  
• perhe  $\{[n, \infty[ \mid n \in \mathbb{N}\}$  on lokaalisti äärellinen.

Kuten välillä kirjassa, käsitellään peitteitä indeksöityinä, t.s. avaruuden  $X$  peite on sellainen perhe  $(A_j)_{j \in J}$ , että  $X = \bigcup_{j \in J} A_j$ . Peite on avoin, jos sen jokainen jäsen  $A_j$  on avoin.

Jatkuvan funktion  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  kantaja (engl. support) on joukko

$$\text{spt}(g) = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}.$$

Nollafunktion kantaja on  $\emptyset$ .

Olk.  $(g_j)_{j \in J}$  perhe jatkuvia funktioita  $g_j: X \rightarrow \mathbb{R}$  s.e. perhe  $(\text{spt}(g_j))_{j \in J}$  on lokaalisti äärellinen.  
Erityisesti joukko  $K(x) = \{j \in J \mid g_j(x) \neq 0\}$  on äärellinen  $\forall x \in X$ .  
Asettamalla

$$g(x) = \sum_{j \in K(x)} g_j(x)$$

saadaan funktio  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ , merk.  $g = \sum_{j \in J} g_j$ .

Jos  $x \in X$ , niin  $x$ illä on ympäristö  $U$ , jossa funktio  $g$  on äärellinen summa jatkuvista funktioista; siis  $g$  on jatkuva  $U$ :ssa. Siis  $g$  on jatkuva jokaisen pisteen eräässä ympäristössä, joten  $g$  on jatkuva koko  $X$ :ssä.

11.11.73



(engl. partition of unity)

**Määr.** <sup>A</sup> 2. Perhe  $(g_j)_{j \in J}$  jatkuvia funktioita  $g_j: X \rightarrow I$  on ykkösen ositus, jos

- 1) perhe  $(\text{spt}(g_j))_{j \in J}$  on lokaalisti äärellinen
- 2)  $\sum_{j \in J} g_j(x) = 1 \quad \forall x \in X$ .

Koska jokaisessa pisteessä jokin  $g_j(x) > 0$ , niin  $(\text{spt}(g_j))_{j \in J}$  on  $X$ 'in lokaalisti äärellinen peite.

Esim. jos  $X = [0, 1]$ , funktiot  $x \mapsto x$  ja  $x \mapsto 1-x$  muodostavat ykkösen osituksen.

(Esim. kuva)

Olk.  $(U_j)_{j \in J}$  avaruuden  $X$  avoin peite. Sanomme, että ykkösen ositus  $(g_j)_{j \in J}$  on peitteeseen  $(U_j)_{j \in J}$  sopiva, jos  $\text{spt}(g_j) \subset U_j \quad \forall j \in J$ .  
(engl. partition of unity subordinated to the covering  $(U_j)_{j \in J}$ )

**Lause** <sup>A</sup> 3. Jos  $(A_j)_{j \in J}$  on lokaalisti äärellinen perhe suljettuja joukkoja, niin yhdiste  $\bigcup \{A_j \mid j \in J\}$  on suljettu.

Tod. HT.

□

**Lemma** <sup>A</sup> 4. Olk.  $(X, d)$  metrinen avaruus, jonka läpimita  $d(X) \leq 1$ , ja olkoon  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $X$ 'in avoin peite. Tällöin on olemassa sellainen ykkösen ositus  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , että  $\text{spt}(g_n) \subset \bar{U}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Tod. Jos  $U_k = X$  jollakin  $k \in \mathbb{N}$ , valitaan  $g_k \equiv 1, g_n \equiv 0, n \neq k$ .

Ol. nyt, että  $U_n \neq X \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Merk.  $V_1 = \emptyset, V_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k, n \geq 2$ .

**Määr.**  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = d(x, X \setminus U_n) - n \cdot d(x, X \setminus V_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

ja  $h_n: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$h_n(x) = \max\{f_n(x), 0\}.$$

Selvästi  $f_n$  ja  $h_n$  ovat jatkuvia ja  $\text{spt}(h_n) \subset \bar{U}_n$

(jos  $x \notin U_n$ , on  $d(x, X \setminus U_n) = 0$  ja siis  $f_n(x) \leq 0$  ja  $h_n(x) = 0$ ).

Osoitetaan, että perhe  $(spt(h_n))$  on lokaalisti äärellinen:

olk.  $y \in \mathbb{X}$ , val.  $k \in \mathbb{N}$  s.e.  $y \in U_k$  ja luku  $r > 0$ , jolla  $B(y, 2r) \subset U_k$ . Riittää osoittaa, että kuula  $W = B(y, r)$  ei kohtaa joukkoja  $spt(h_n)$ , kun  $n > \frac{1}{r}$  ja  $n > k$ .

olk.  $x \in W$ . Koska  $U_k \subset V_n$  ( $n > k$ ), niin

$$(*) \quad d(x, \mathbb{X} \setminus V_n) \geq d(x, \mathbb{X} \setminus U_k) \geq \underbrace{d(y, \mathbb{X} \setminus U_k)}_{\geq 2r} - \underbrace{d(x, y)}_{< r} > r.$$

Koska  $d(\bar{x}) \leq 1$ , saadaan

$$f_n(x) < 1 - nr < 0,$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $(*)$   $n > \frac{1}{r}$

Siis  $h_n(x) = 0 \quad \forall x \in W$ , joten  $W \cap spt(h_n) = \emptyset$ .

Voidaan siis määritellä jatkuva funktio  $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n: \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty[$ .

Lisäksi  $h(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$ , sillä jos  $n$  on pienin luku, jolla  $x \in U_n$ , niin  $x \notin V_n$ , joten  $f_n(x) = d(x, \mathbb{X} \setminus U_n) > 0$  ja siis  $h(x) \geq h_n(x) > 0$ .

Funktiot  $g_n: g_n(x) = \frac{h_n(x)}{h(x)}$

muodostavat vaaditun ylläkoson osituksen ( $\sum g_n(x) = \frac{\sum h_n(x)}{h(x)} = 1$ ).



Lause 12.5. Metrisyvässä  $N_2$ -avaruudessa  $\mathbb{X}$  on jokaista avointa peitettä kohti olemassa siihen sopiva ylläkoson ositus.

Tod. olk.  $(U_i)$  joiden  $\mathbb{X}$  avoin peite. Topologia I: 10.6  $\Rightarrow$

$\exists \mathbb{X}$ in metriikka, joka määrää  $\mathbb{X}$ in topologian ja jossa  $d(\bar{x}) \leq 1$ .

Kullakin  $x \in \mathbb{X}$  val.  $i(x) \in \mathbb{I}$ , jolla  $x \in U_{i(x)}$  ja luku  $r(x) > 0$ , jolla  $B(x, 2r(x)) \subset U_{i(x)}$ . Kuulat  $B(x, r(x))$ ,  $x \in \mathbb{X}$ , muodostavat  $\mathbb{X}$ in avoimen peitteen.  $N_2$ -avaruus on aina Lindelöf

(Väisälä: Lause 12.14), joten tällä peitteellä on numeroituva osapeite, t.s. void. valita  $\mathbb{X}$ in jono  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s.e. kuulat  $B(x_n, r(x_n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , peittävät  $\mathbb{X}$ in.

Lemman 4.4. nojalla  $\exists$  yksiksen ositus  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , jolla  $\text{spt}(g_n) \subset \overline{B}(x_n, r(x_n)) \subset U_{i(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Kun  $j \in J$ , merk.  $K(j) = \{n \in \mathbb{N} \mid i(x_n) = j\}$  ja määnn.

$$h_j: X \rightarrow [0, 1]$$
$$(*) \quad h_j(x) = \sum_{n \in K(j)} g_n(x).$$

Jos  $K(j) = \emptyset$ , määnn.  $h_j \equiv 0$ .

Huom. koska perhe  $(\text{spt}(g_n))$  on lokaaläärellinen, niin  $\sum$  (kiinteällä  $x$ :n arvolla) summassa (\*) on vain äärellisen monta nollasta eroavaa termiä.

Funktiot  $h_j$  ovat jatkuvia  
 $\text{spt}(h_j) \subset U_j \quad \forall j \in J$   
Perhe  $(h_j)$  on haettu yksiksen ositus. } HT



Määr. 6.6. Olk.  $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$  ja  $\{B_\beta \mid \beta \in B\}$  kaksi avoimien  $X$  peitettä. Sanomme, että peite  $\{B_\beta\}$  on peittees  $\{A_\alpha\}$  tiheennys (engl. refinement)

$$\forall \beta \in B \exists \alpha \in A \text{ s.t. } B_\beta \subset A_\alpha. \text{ Merk. } \{B_\beta\} \ll \{A_\alpha\}$$

Tiheennys on tarkka (precise), jos

$$A = B \text{ ja } B_\alpha \subset A_\alpha \quad \forall \alpha \in A.$$

Määr. 7.7. Hausdorffin avaruus  $X$  on parakompakti, jos jokaisella  $X$ :n avoimella peitteellä on avoin lokaalisti äärellinen tiheennys.

Lause 8.8. Olk.  $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$  ja  $\{B_\beta \mid \beta \in B\}$  avoimien  $X$  peitteitä. Tällöin

1)  $\{A_\alpha \cap B_\beta \mid (\alpha, \beta) \in A \times B\}$  on  $X$ :n peite, joka on sekä  $\{A_\alpha\}$ :n että  $\{B_\beta\}$ :n tiheennys.

Jos  $\{A_\alpha\}$  ja  $\{B_\beta\}$  ovat lokaalisti äärellisiä (vast. pisteeärellisiä) niin  $\{A_\alpha \cap B_\beta\}$  on lokaalisti äärellinen (vast. pisteeärellinen).

2) Jokainen peitteiden  $\{A_\alpha\}$  ja  $\{B_\beta\}$  yhteinen tiheennys (siis peite  $\{C_\gamma\}$ , jolle  $\{C_\gamma\} \ll \{A_\alpha\}$  ja  $\{C_\gamma\} \ll \{B_\beta\}$ ) on myös peitteeseen  $\{A_\alpha \cap B_\beta\}$  tiheennys.

Tod. HT.



A

Lause 9.9. Jos peritteellä  $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$  on pisteäärellinen (vast. lok. äärellinen) tiheys  $\{B_\beta \mid \beta \in B\}$ , niin sillä on myös tarkka pisteäärellinen (vast. lok. äärellinen) tiheys  $\{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ .  
Lisäksi, jos jokainen  $B_\beta$  on avoin, niin myös joukot  $C_\alpha$  voidaan valita avoimiksi.

Tod. Määritellään funktio  $\varphi: B \rightarrow A$ , joka jokaiseen  $\beta \in B$  liittää jonkin  $\alpha \in A$ , jolle  $B_\beta \subset A_\alpha$ .  
Jokaiselle  $\alpha$ , olkoon  $C_\alpha = \bigcup \{B_\beta \mid \varphi(\beta) = \alpha\}$ ; jotkin  $C_\alpha$  voivat olla tyhjiä. Selvästi  $C_\alpha \subset A_\alpha \forall \alpha$ , ja myös  $\{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$  on peite, koska jokainen  $B_\beta$  sisältyy johonkin  $C_\alpha$ :aan. Samoin on selvää, että  $C_\alpha$  on avoin, jos joukot  $B_\beta$  ovat avoimia.  
Jos  $\{B_\beta\}$  on pisteäärellinen, niin jokainen  $x \in X$  kuuluu vain äärell. moneen  $B_\beta$  ja siis korkeintaan yhtä moneen  $C_\alpha$ .  
Vastaavasti, jos  $\{B_\beta\}$  on lok. äärellinen, niin jokaisella  $x \in X$  on ympäristö  $U$ , joka kohtaa vain äärellisen monta joukosta  $B_\beta$ . Tämä ympäristö kohtaa siis korkeintaan näin monta joukosta  $C_\alpha$ .



A

Teoreema 10. Jokainen parakompakti avaruus on normaali.

X

Tod. Os. ensin, että  $X$  on säännöllinen. Olk.  $x \in X, A \in X, x \notin A$ .  
Koska  $X$  on Hausdorff, on jokaisella  $a \in A$  ympäristö  $U_a$  s.e.  $x \notin \overline{U_a}$ . Koska  $\{U_a \mid a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$  on  $X$ :n avoin peite, on sillä parakompaktisuuden ja Lauseen 9.9 nojalla tarkka avoin lok. äärellinen tiheys  $\{U_a \mid a \in A\} \cup \{G\}$ .  
Tällöin  $W = \bigcup \{U_a \mid a \in A\}$  on avoin ja sisältää  $A$ :n. Lisäksi, koska  $\{U_a\}$  on lok. äärellinen, on Lauseen 9.3 nojalla  $\overline{W} = \bigcup \{\overline{U_a} \mid a \in A\}$ . Koska  $x \notin \overline{U_a} \supset \overline{U_a} \forall a \in A$ , on siis  $x \notin \overline{W}$ . Siis  $X \setminus \overline{W}$  ja  $W$  ovat  $x$ :in ja  $A$ :n erill. ympäristöt, mikä osoittaa säännöllisyyden.

" $\supset$ " lok.  
" $\subset$ " A.3

Normaalisuus: olk.  $A, B \in X, A \cap B = \emptyset$ . Säännöllisyydestä seuraa, että  $\forall a \in A \exists$  ymp.  $U_a$  s.e.  $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$ . Vastaava päättely kuin edellä (missä y korvataan  $B$ :llä) antaa  $A$ :lle ja  $B$ :lle erilliset ympäristöt.



18.11.13  
→

AG

Teoreema 11. Olk.  $X$  parakompakti. Tällöin jokaisella  $X$ :n avoimella peitteellä  $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  on olemassa tähän peitteeseen sopiva yksiköiden ositus.

Tod. Parakompaktisuuden nojalla on olemassa peitteen  $\{U_\alpha\}$  tarkka avoin lok. äärellinen hennys  $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ . Voidaan osoittaa (kts. [Dugundji: Topology, VII 6.1, s. 152], palataan todistukseen myöhemmin, jos ehditään), että normaaliomuudesta seuraa: on olemassa lok. äärellinen avoin peite  $\{W_\alpha\}$  s.e.  $\overline{W_\alpha} \subset U_\alpha$ . Sama uudelleen: saadaan lok. äärellinen avoin peite  $\{\overline{W}_\alpha\}$  s.e.  $\overline{\overline{W}_\alpha} \subset V_\alpha$ .

Koska  $X$  on normaali, löydetään Urysonin lemmän avulla jokaiselle  $\alpha \in A$  jatkuva funktio  $g_\alpha: X \rightarrow I$  s.e.  $g_\alpha|_{\overline{W}_\alpha} \equiv 1$  ja  $g_\alpha|_{(X \setminus V_\alpha)} \equiv 0$  (jos  $V_\alpha = \emptyset$ , määr.  $g_\alpha \equiv 0$ ).  
Siis  $\text{spt}(g_\alpha) \subset \overline{W}_\alpha \subset U_\alpha \quad \forall \alpha \in A$ .

Koska  $\{\overline{W}_\alpha\}$  on lok. äärellinen peite, niin jokaisella  $x \in X$  vähintään 1 mutta vain äärellisen moni funktioista  $g_\alpha$  on  $\neq 0$ .  
Siis  $\sum_\alpha g_\alpha$  on hyvin määr. funktio  $X \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $\sum_\alpha g_\alpha(x) \neq 0 \quad \forall x$ .

Jatkuvuus: jokaisella pisteellä on ympäristö, jossa vain äärellisen moni funktioista  $g_\alpha$  ei ole  $\equiv 0$ ; siis  $\sum_\alpha g_\alpha$  on jatkuva jokaisen pisteen eräessä ympäristössä, siis koko  $X$ :ssä.

Haluttu yksiköiden ositus on perhe  $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ , missä  

$$h_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{\sum_\alpha g_\alpha(x)}.$$
□

A  
Sovellus 12. Jos  $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$  on yksiköiden ositus avaruudella  $X$  ja  $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$  on perhe jatkuvia funktioita  $\varphi_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$ , niin funktio  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) h_\alpha(x)$ , on jatkuva.

Itse asiassa funktioiden  $\varphi_\alpha$  ei tarvitse olla määriteltyjä koko  $X$ :ssä: Jos  $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$  on avoimeen peitteeseen  $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  sopiva yksiköiden ositus ja  $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$  on perhe jatkuvia funktioita  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ , määritellään funktiot  $f_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x), & x \in U_\alpha \\ 0, & x \notin U_\alpha \end{cases}$$

Funktiot  $f_\alpha$  eivät siis välttämättä ole jatkuvia, Funktio  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x) h_\alpha(x)$ , kuitenkin on jatkuva (HT).  
□

A

Teoreema 13. Oletetaan, että avoimuudella  $\bar{X}$  on ominaisuus:  
jokaiselle avoimelle peitteelle  $\{U_\alpha\}$  löytyy siihen sopiva  
ykköksen ositus. Tällöin  $\bar{X}$  on parakompakti.

Tod. ~~oleellisesti sama kuin Harj. 10 / Teht. 5.~~  
HT □

Muita tuloksia (viittaukset Dugundjin kirjään):

- Jos  $\bar{X}$  on parakompakti ja  $f: \bar{X} \rightarrow Y$  on jatkuva suljettu surjektio,  
niin  $Y$  on parakompakti (s. 165)
- Jos  $\bar{X}$  on parakompakti ja  $A \subseteq \bar{X}$ , niin  $A$  on parakompakti. (HT)  
(jokaisen aliovaruus ei välttämättä ole)
- $\bar{X}_\alpha, \alpha \in A$  parakompakteja  $\Leftrightarrow \prod \bar{X}_\alpha$  parakompakti (s. 165)
- Jokainen metristyvä avaruus on parakompakti (s. 186).