**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Topologia Ib, syksy 2016**
**Kurssikoe 22.12.**

Näissä tehtävissä euklidisella tasolla $\mathbb{R}^2$ tarkoitetaan metristä avaruutta $(\mathbb{R}^2, d_2)$, missä $d_2$ on euklidinen metriikka $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = ((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2)^{1/2}$ kaikilla $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Lisäksi merkitään $B^2(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon d_2(x,y) < r\}$ ja $\bar{B}^2(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon d_2(x,y) \le r\}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$ ja $r > 0$.

**t1.** Olkoon $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$ euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko.

(a) (3p.) Onko $(E, d_E)$ täydellinen metrinen avaruus? (Perustele vastauksesi.)

(b) (3p.) Onko $(E, d_E)$ kompakti metrinen avaruus? (Perustele vastauksesi.)

Tässä $d_E$ on metriikan $d_2$ rajoittuma joukkoon $E$.

*Ratkaisu:* Havaitaan aluksi, että $E = f^{-1}\{0\}$, missä $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus $(x,y) \mapsto y - x^2$. Näin ollen $E$ on suljettu joukko euklidisessa tasossa $\mathbb{R}^2$.

(a) Koska $\mathbb{R}^2$ on täydellinen ja $E \subset \mathbb{R}^2$ on suljettu, niin $E$ on täydellinen indusoidussa metriikassa.

(b) Koska $(n,n^2) \in E$ ja $||(n,n^2)||_2 \ge n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, niin $E$ ei ole rajoitettu. Näin ollen $E$ ei ole kompakti.

**t2.** Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2n(x - \frac{1}{2n}), & \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

(a) (3p.) Osoita, että jono $(f_n)$ suppenee pisteittäin.

(b) (3p.) Osoita, että jono $(f_n)$ ei suppene tasaisesti.

*Ratkaisu:*

(a) Koska $f_n(0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin jono $(f_n(0))$ on vakiojono ja siten suppenee. Olkoon $x \in ]0,1]$. Valitaan sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $x > 1/n_0$. Tällöin kaikilla $n \ge n_0$ pätee $f_n(x) = 1$. Näin ollen jono $(f_n(x))$ suppenee jokaisella $x \in [0,1]$. Funktiojono $(f_n)$ suppenee siis pisteittäin.

(b) Edellisen kohdan perusteella jono $(f_n)$ suppenee pisteittäin funktioon $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Koska funktiot $f_n$ ovat jatkuvia, mutta $f$ ei ole jatkuva, niin jonon $(f_n)$ suppeneminen ei ole tasaista.

**t3.** (6p) Olkoon $f \colon (X,d) \to (Y,d')$ jatkuva kuvaus, $(x_n)$ metrisen avaruuden $(X,d)$ suppeneva jono ja $\hat{x} \in X$ jonon $(x_n)$ raja-arvo. Osoita, että jono $(f(x_n))$ suppenee metrisessä avaruudessa $(Y,d')$ pisteeseen $f(\hat{x})$.

*Ratkaisu:* Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $f$ on jatkuva, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $fB_d(\hat{x},\delta) \subset B_{d'}(f(\hat{x}),\varepsilon)$. Koska $x_n \to \hat{x}$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $x_n \in B_d(\hat{x},\delta)$ kaikilla $n \ge n_0$. Nyt $f(x_n) \in B_{d'}(f(\hat{x}),\varepsilon)$ kaikilla $n \ge n_0$. Näin ollen $f(x_n) \to f(\hat{x})$.

**t4.** (6p) Olkoon $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bar{B}^2((k,0),1/2)$ euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko. Osoita, että $E$ on yhtenäinen.

*Ratkaisu:* Aloitetaan tiedosta, että $A_k = \bar{B}^2((k,0),1/2)$ on normiavaruuden suljettuna kuulana polkuyhtenäinen ja siten yhtenäinen. Havaitaan myös, että $[1/2,\infty[\times\{0\} \subset E$. Olkoon $f\colon [1/2,\infty[\to \mathbb{R}^2$ kuvaus $x \mapsto (x,0)$. Koska $f$ on jatkuva ja $[1/2,\infty[$ on väli, niin $f\mathbb{R} = [1/2,\infty[\times\{0\}$ on yhtenäinen. Koska $A_k \cap [1/2,\infty[\times\{0\} = [k-1/2,k+1/2] \neq \varnothing$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$, niin $E_k = A_k \cup [1/2,\infty[\times\{0\}$ on yhtenäinen jokaisela $k \in \mathbb{N}$. Koska jokainen joukko $E_k$ sisältää joukon $[1/2,\infty[\times\{0\}$, niin $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ on yhtenäinen.