HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 6 – Ratkaisuehdotuksia

t1. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja olkoot $\alpha\colon [0,1] \to X$ ja $\beta\colon [0,1] \to X$ sellaisia polkuja, että $\alpha(1) = \beta(0)$. (Piirrä kuva.) Osoita, että kuvaus $\gamma\colon [0,1] \to X$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq 1/2, \\ \beta(2t-1), & t > 1/2, \end{cases}$$

on jatkuva ja siis polku.

Ratkaisu: Tehtävään on useita ratkaisuja. Yksi suoraviivaimmista on esimerkiksi seuraava. Havaitaan aluksi, että $\gamma|_{[0,1/2]} = \alpha \circ f$, missä $f\colon [0,1/2] \to [0,1]$, $x \mapsto 2x$, ja että $\gamma|_{[1/2,1]} = \beta \circ g$, missä $g\colon [1/2,1] \to [0,1]$, $x \mapsto 2x-1$. Koska f ja g ovat jakuvia, niin rajoittumat $\gamma|_{[0,1/2]}$ ja $\gamma|_{[1/2,1]}$ ovat jatkuvia. Koska $[0,1/2]$ ja $[1/2,1]$ ovat suljettuja joukkoja välillä $[0,1]$ ja $[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1]$, niin γ on jatkuva lauseen 7.13 perusteella. (Muissa tämän tehtäväsetin ratkaisuissa vaihtoehtoisia tapoja argumentoida jatkuvuus.)

t2. Osoita, että euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko $E = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ on polkuyhtenäinen. (*Vinkki:* **p1.** ja **t1.**)

Ratkaisu: Olkoon $x = (x_1, x_2) \in E$ ja $y = (y_1, y_2) \in E$ joukon E mielivaltaisia pisteitä. Konstruoidaan polku näiden pisteiden välillä. Ideana on yhdistää pisteet x ja y vaaka- ja pystysuoria janoja käyttäen. Nyt on neljä eri mahdollista tapausta:

- $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $y_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Määritellään $\gamma\colon [0,1] \to E$ kaavalla

$$\gamma(t) = \begin{cases} (x_1, (1-2t)x_2 + 2ty_2), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ ((2-2t)x_1 + (2t-1)y_1, y_2), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$

.

  Kuvaus γ on hyvin määritelty, sillä kun $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, niin $\gamma(t) = (x_1, (1-2t)x_2 + 2ty_2) \in E$, koska $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Vastaavasti kun $\frac{1}{2} < t \leq 1$, niin $\gamma(t) = ((2-2t)x_1 + (2t-1)y_1, y_2) \in E$, sillä $y_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
  Lisäksi γ on jatkuva väleillä $[0, \frac{1}{2}]$ ja $]\frac{1}{2}, 1]$, koska kuvaukset $t \mapsto (x_1, (1-2t)x_2 + 2ty_2)$ ja $t \mapsto ((2-2t)x_1 + (2t-1)y_1, y_2)$ ovat jatkuvia kaikilla t, mikä nähdään komponenttikuvausten jatkuvuudesta. γ nähdään jatkuvaksi myös pisteessä $\frac{1}{2}$, sillä

$$\lim_{t \to \frac{1}{2}^-} \gamma(t) = (x_1, y_2) = \lim_{t \to \frac{1}{2}^+} \gamma(t),$$

  eli toispuoleiset raja-arvot ovat samat kuin funktion arvo pisteessä $\frac{1}{2}$. Siis $\gamma(t)$ on jatkuva koko välillä $[0,1]$.
  Lisäksi nähdään, että $\gamma(0) = (x_1, x_2)$ ja $\gamma(1) = (y_1, y_2)$, joten γ on polku pisteestä x pisteeseen y.

- $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $y_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Kuten edellisessä tapauksessa, määritellään polku $\gamma\colon [0,1] \to E$ kaavalla

$$\gamma(t) = \begin{cases} ((1-2t)x_1 + 2ty_1, x_2), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (y_1, (2-2t)x_2 + (2t-1)y_2), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}.$$

  Tämä nähdään hyvin määritellyksi ja jatkuvaksi aivan kuten edellä. Lisäksi $\gamma(0) = (y_1, y_2)$ ja $\gamma(1) = (x_1, x_2)$, joten tämä on polku pisteestä y pisteeseen x.

- $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $y_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Määritellään $\gamma\colon [0,1] \to E$ kaavalla

  $$\gamma(t) = \begin{cases} (x_1, (1-3t)x_2 + 3tx_1), & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ ((2-3t)x_1 + (3t-1)y_1, x_1), & \frac{1}{3} < t \le \frac{2}{3} \\ (y_1, (3-3t)x_1 + (3t-2)y_2), & \frac{2}{3} < t \le 1 \end{cases}.$$

  .

  $\gamma(t)$:n jompikumpi koordinaatti on aina $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tai $y_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jokaisella t, joten γ on hyvin määritelty kuvaus. γ nähdään jatkuvaksi kuten aiemmissa tapauksissa: rajoittumat väleille $[0, \frac{1}{3}],]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ja $]\frac{2}{3}, 1]$ ovat jatkuvia ja toispuoleiset raja-arvot pisteissä $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ täsmäävät funktion arvon kanssa. Siis γ on todella polku joukossa E.

  Nyt $\gamma(0) = (x_1, x_2)$ ja $\gamma(1) = (y_1, y_2)$, joten γ on polku pisteestä x pisteeseen y.

- $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $y_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Määritellään $\gamma\colon [0,1] \to E$ kaavalla

  $$\gamma(t) = \begin{cases} ((1-3t)x_1 + 3tx_2, x_2), & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ (x_2, (2-3t)x_2 + (3t-1)y_2), & \frac{1}{3} < t \le \frac{2}{3} \\ ((3-3t)x_2 + (3t-2)y_1, y_2), & \frac{2}{3} < t \le 1 \end{cases}.$$

  .

  Tämä nähdään hyvin määritellyksi ja jatkuvaksi kuvaukseksi kuten edellisessä kohdassa. Nyt $\gamma(0) = (x_1, x_2)$ ja $\gamma(1) = (y_1, y_2)$, joten tämä on kuvaus pisteestä x pisteeseen y.

Siis jokaiset kaksi joukon E pistettä pystytään yhdistämään jatkuvalla polulla E:ssä, joten E on polkuyhtenäinen.

t3. Olkoon (X, d) yhtenäinen metrinen avaruus ja olkoon $f\colon X \to \mathbb{R}$ sellainen jatkuva funktio, että jokaisella $x \in X$ on ympäristö, jossa f on vakio. Osoita, että f on vakiofunktio.

Ratkaisu: Väite pätee triviaalisti, jos X on tyhjä joukko. Oletetaan siis, että X on epätyhjä ja olkoon $x_0 \in X$ jokin tämän avaruuden alkio. Merkitään $y_0 = f(x_0)$. Tällöin joukko $f^{-1}\{y_0\}$ on suljettu suljetun joukon $\{y_0\}$ alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa f. Osoitetaan seuraavaksi, että $f^{-1}\{y_0\}$ on myös avoin joukko. Olkoon täten $x \in f^{-1}\{y_0\}$ tämän joukon mielivaltainen alkio, eli $f(x) = y_0$. Nyt pisteellä x on ympäristö U, jossa kuvaus f on vakio. Koska $x \in U$ ja $f(x) = y_0$, täytyy tällöin päteä $f(y) = y_0$ kaikilla $y \in U$. Siis $U \subset f^{-1}\{y_0\}$. Olemme osoittaneet, että jokaisella joukon $f^{-1}\{y_0\}$ alkiolla x on ympäristö U, joka sisältyy joukkoon $f^{-1}\{y_0\}$, eli $f^{-1}\{y_0\}$ on avoin joukko.

Nyt siis $f^{-1}\{y_0\}$ on avaruuden X avoin ja suljettu joukko, ja koska X on yhtenäinen avaruus, täytyy tällöin päteä joko $f^{-1}\{y_0\} = \emptyset$ tai $f^{-1}\{y_0\} = X$. $f^{-1}\{y_0\}$ on epätyhjä, sillä $x_0 \in f^{-1}\{y_0\}$, joten täytyy päteä $f^{-1}\{y_0\} = X$. Siis $f(x) = y_0$ kaikilla $x \in X$, joten f on vakiofunktio.

t4. Olkoon $n \ge 2$, ja olkoon $||\cdot||$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ normi. Osoita, että yksikköpallo $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$ on normiavaruuden $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ polkuyhtenäinen osajoukko. (*Vinkki:* Aloita osoittamalla, että $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on polkuyhtenäinen $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$:ssä. Huomaa, että normia $||\cdot||$ ei oleteta euklidiseksi normiksi.)

Ratkaisu: Osoitetaan ensin, että $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on polkuyhtenäinen normin $\|\cdot\|$ indusoimassa metriikassa. Valitaan kaksi pistettä $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tarkastellaan ensin pisteitä yhdistävää janaa $\gamma_{x,y}(t) = tx + (1-t)y, t \in [0,1]$. Kuvaukselle γ saadaan seuraava normiarvio

$$\|\gamma_{x,y}(t) - \gamma_{x,y}(t')\| \leq \|(t-t')x\| + \|((1-t)-(1-t'))y\| = (\|x\| + \|y\|)|t-t'|.$$

Näin ollen $\gamma_{x,y}$ on Lipschitz, ja siten jatkuva. Jos piste 0 ei ole janalla $\gamma_{x,y}$, se on pisteet x ja y yhdistävä polku avaruudessa $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Oletetaan sitten, että $t_0 x + (1-t_0)y = 0$ jollakin $t_0 \in [0,1]$. Koska $n \geq 2$, voidaan valita jokin piste $z \in \mathbb{R}^n$, joka ei ole x:n ja y:n kautta kulkevalla suoralla $l_{x,y}$. Huomaa, että tällöin $z \neq 0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että 0 ei kuulu kumpaankaan suorista $l_{x,z}$ ja $l_{z,y}$. Jos esimerkiksi $0 \in l_{x,z}$, täytyy päteä $l_{x,z} = l_{x,y}$, sillä molemmat suorat sisältävät pisteet 0 ja $x \neq 0$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä piste z valittiin suoran $l_{x,y}$ ulkopuolelta. Tapaus $0 \in l_{z,y}$ osoitetaan samanlaisesti.

Nyt janapolut $\gamma_{x,z}$ ja $\gamma_{z,y}$ eivät kohtaa origoa, joten kuten aiemmin perusteltua ne ovat $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:n jatkuvia polkuja normin $\|\cdot\|$ indusoimassa metriikassa. Määritellään yhdistetty polku γ kuten tehtävässä **t1.**:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_{x,z}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_{z,y}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Tehtävän **t1.** nojalla γ on jatkuva, jolloin se on polku pisteestä x pisteeseen y. Lisäksi koska polut $\gamma_{x,z}$ ja $\gamma_{z,y}$ eivät kohtaa origoa, polku γ ei myöskään kohtaa sitä. Nyt on saatu polku $\gamma \colon I \to (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d_{\|\cdot\|})$ pisteiden x ja y välille. Näin ollen $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on polkuyhtenäinen normin $\|\cdot\|$ indusoimassa metriikassa.

Muista, että normikuvaus $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, joka on määritelty kaavalla $x \mapsto \|x\|$, on jatkuva. Tämän voi päätellä normien kolmioepäyhtälön vasemmasta puolesta $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$, jonka nojalla normikuvaus on 1-Lipschitz. Siten tulofunktion jatkuvuudella saadaan jatkuva kuvaus

$$f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S(0,1), f(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

missä molemmat avaruudet on varustettu normin $\|\cdot\|$ indusoimalla metriikalla. Lisäksi f kuvaa $S(0,1)$:n pisteet itselleen.

Olkoot nyt x ja y jotkin kaksi avaruuden $S(0,1)$ pistettä. Aiemman perusteella löytyy polku γ, joka yhdistää x:n ja y:n avaruudessa $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d_{\|\cdot\|})$. Nyt $f \circ \gamma$ on haluttu pisteet x ja y yhdistävä polku $S(0,1)$:ssä. Täten $S(0,1)$ on polkuyhtenäinen.

t5. Olkoon $n \geq 1$ ja $f \colon S^n \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, missä $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon ||x||_2 = 1\}$. Osoita, että on olemassa sellainen $x_0 \in S^n$, jolle pätee $f(x_0) = f(-x_0)$. (*Vinkki:* Edellinen tehtävä. Tarkastele funktiota $g \colon S^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f(-x)$.)

Ratkaisu: Koska f on jatkuva, voidaan rakentaa jatkuva funktio $g \colon S^n \to \mathbb{R}$ siten, että $g(x) = f(x) - f(-x)$ kaikilla $x \in S^n$. Tällöin $g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x)$, eli funktio g on *pariton*. Nyt jos $g(x_0) = 0$ jollain $x_0 \in S^n$, niin väite pätee.

Olkoon $x \in S^n$ ja oletetaan että $g(x) > 0$ (tai $g(x) < 0$). Koska edellisen tehtävän nojalla S^n on polkuyhtenäinen, ja toisaalta $g(-x) < 0$ (tai $g(-x) > 0$), on lauseen 14.19 perusteella olemassa sellainen piste $x_0 \in S^n$ että $g(x_0) = 0$. Siispä $f(x_0) = f(-x_0)$.

t6. Olkoon $E = \{f \in C([0,1]) \colon |f(1)| = 1\}$.

(a) Osoita, että E on metrisen avaruuden $(C([0,1]), d_\infty)$ epäyhtenäinen osajoukko.

(b) (Vaikeahko) Osoita, että E on metrisen avaruuden $(C([0,1]), d_1)$ polkuyhtenäinen osajoukko. (*Vinkki:* Jos joukko on yhdiste kahdesta polkuyhtenäisestä osajoukosta A ja B, riittää löytää yksi polku joukosta A joukkoon B. Kirjoita E yhdisteenä joukoista $E_1 = \{g \in E \colon g(1) = 1\}$ ja $E_2 = \{g \in E \colon g(1) = -1\}$. Osoita joukot E_1 ja E_2 polkuyhtenäisiksi. Etsi tämän jälkeen sellainen polku $\gamma \colon [0,1] \to E$, että $\gamma(0) \in C([0,1])$ on vakiofunktio $x \mapsto -1$ ja $\gamma(1) \in C([0,1])$ funktio $x \mapsto 2x - 1$.)

Ratkaisu:

(a) Merkitään $E_1 = \{g \in E \colon g(1) = 1\}$ sekä $E_2 = \{g \in E \colon g(1) = -1\}$. Tällöin $E = E_1 \cup E_2$ sekä $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Olkoon $f \in \overline{E_1}$. Siis jokaisella $\varepsilon > 0$ avoin kuula $B_{d_\infty}(f, \varepsilon)$ kohtaa joukkoa E_1, joten on olemassa sellainen g_ϵ, että

$$\sup_{x \in [0,1]} |g_\epsilon(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Erityisesti $|g(1) - f(1)| = |1 - f(1)| < \epsilon$. Koska tämä pätee mille tahansa $\epsilon > 0$, $f(1) = 1$ eli $f \in E_1$. Siis E_1 on suljettu joukko. Vastaavalla tavalla nähdään, että myös E_2 on suljettu joukko. Tällöin E_1 ja E_2 ovat sekä suljettuja että avoimia aliavaruudessa E (relatiivitopologiassa), joten E on epäyhtenäinen.

(b) Olkoon E_1 ja E_2 kuten edellisessä kohdassa. Osoitamme, että metrisessä avaruudessa $(C([0,1]), d_1)$ joukot E_1 ja E_2 ovat konvekseja, ja siten yhtenäisiä. Todistamme aliavaruuden $E_1 \subset (C([0,1]), d_1)$ konveksiuden, tapaus E_2 hoituu täysin samalla tavalla. Olkoon $f, g \in E_1$. Olkoon $t \in [0,1]$. Tällöin $tf + (1-t)g \in C([0,1])$, koska $C([0,1])$ on vektoriavaruus. Huomataan, että $(tf + (1-t)g)(1) = tf(1) + (1-t)g(1) = t + 1 - t = 1$. Siis $tf + (1-t)g \in E_1$ kaikilla $t \in [0,1]$. Koska f ja g oli valittu mielivaltaisesti, E_1 on konveksi ja siten yhtenäinen joukko metrisessä avaruudessa $(C([0,1]), d_1)$. Sama pätee joukolle E_2.

Osoitetaan, että $E = E_1 \cup E_2$ on polkuyhtenäinen. Tähän riittää se, että on jokin joukon E polku $\gamma : [0,1] \mapsto E$, jolle pätee $\gamma(0) \in E_2$ ja $\gamma(1) \in E_1$. Määritellään kuvaus $\gamma : [0,1] \to (C([0,1]), d_\infty)$ seuraavasti. Pisteessä $t = 0$, $\gamma(0)(s) = -1$ kaikilla $s \in [0,1]$, siis $\gamma(0)$ on vakiofunktio -1. Pisteessä $t = 1$, $\gamma(1)(s) = 2s - 1$ kaikilla $s \in [0,1]$. Pisteissä $t \in]0,1[$ määritellään

$$\gamma(t)(s) = \begin{cases} -1 & 0 \le s \le 1 - t \\ 1 - \frac{2}{t} + \frac{2s}{t} & 1 - t \le s \le 1. \end{cases}$$

Jos $t \in]0,1[$ ja $s = 1 - t$, niin $1 - \frac{2}{t} + \frac{2s}{t} = 1 - \frac{2}{t} + + \frac{2-2t}{t} = 1 - 2 = -1$, joten $\gamma(t)$ on hyvin määritelty jatkuva kuvaus kaikilla $t \in [0,1]$. Kun $t = 0$, $\gamma(t)(1) = -1$, muulloin $\gamma(t)(1) = 1$. Siis $\gamma(t) \in E$ kaikilla $t \in [0,1]$. Osoitetaan sitten, että $\gamma : [0,1] \to (C([0,1]), d_\infty)$ on jatkuva.

Funktioille $\gamma(t)$ pätee:

$$\int_0^1 \gamma(0)(s)ds = -1$$

ja

$$\int_0^1 \gamma(1)(s)ds = 0$$

sekä

$$\begin{aligned}\int_0^1 \gamma(t)(s)ds =& t-1+\int_{1-t}^1 1-\frac{2}{t}+\frac{2s}{t}ds \\ &= t-1+(1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t})-(1-t-\frac{2-2t}{t}+\frac{(1-t)^2}{t}) \\ &= 2t-\frac{1}{t}-1-\frac{(1-t)^2-2+2t}{t}=2t-1-t=t-1.\end{aligned}$$

Huom. jos $t_1 > t_2$, niin $\gamma(t_1)(s) \geq \gamma(t_2)(s)$ kaikilla $s \in [0,1]$, joten $d_1(\gamma(t_1), \gamma(t_2) = \int_0^1 |\gamma(t_1)(s) - \gamma(t_2)(s)| \mathrm{d}s = \int_0^1 \gamma(t_1)(s) - \gamma(t_2)(s)\mathrm{d}s$.
Osoitetaan funktion γ jatkuvuus pisteessä $t = 0$. Olkoon $\epsilon > 0$. Jos $0 < t' < \epsilon$, niin

$$\begin{aligned}d_1(\gamma(t'), \gamma(0) &= \int_0^1 \gamma(t')(s) - \gamma(0)(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \gamma(t')(s)\mathrm{d}s - \int_0^1 \gamma(0)(s)\mathrm{d}s \\ &= t'-1-(-1) = t' < \epsilon.\end{aligned}$$

Osoitetaan funktion γ jatkuvuus pisteessä $t = 1$. Olkoon $\epsilon > 0$. Jos $1-\epsilon < t' < 1$, niin

$$\begin{aligned}d_1(\gamma(t'), \gamma(1) &= \int_0^1 \gamma(1)(s) - \gamma(t')(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \gamma(1)(s)\mathrm{d}s - \int_0^1 \gamma(t')(s)\mathrm{d}s \\ &= 0-(t'-1) = 1-t' < \epsilon.\end{aligned}$$

Osoitetaan funktion γ jatkuvuus mielivaltaisessa välin]0,1[pisteessä t. Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon $t' \in]0,1[$, $|t-t'| < \epsilon$. Jos $t > t'$, niin

$$\begin{aligned}d_1(\gamma(t), \gamma(t') &= \int_0^1 \gamma(t)(s) - \gamma(t')(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \gamma(t)(s)\mathrm{d}s - \int_0^1 \gamma(t')(s)\mathrm{d}s \\ &= t-1-t'+1 = t-t' < \epsilon.\end{aligned}$$

Jos $t' < t$, vastaavasti nähdään $d_1(\gamma(t), \gamma(t') = t - t' < \epsilon$.

Siis $\gamma : [0,1] \to E$ on polku, jolle pätee $\gamma(0) \in E_2$ ja $\gamma(1) \in E_1$. Väite seuraa tästä.