HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 6

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

p1. Olkoon $(V, ||\cdot||)$ normiavaruus ja $x, y \in V$. Osoita, että kuvaus $\gamma\colon [0,1] \to V$, $t \mapsto (1-t)x + ty$, on jatkuva ja siis polku.

p2. Osoita tehtävän **t1.** avulla, että euklidisen tason osajoukko $\mathbb{R}^2 \setminus (]-1,1[\times\{0\})$ on polkuyhtenäinen.

p3. Onko joukko $E = (\mathbb{Z}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ euklidisen tason yhtenäinen osajoukko?

p4. Olkoon (X, d) diskreetti yhtenäinen metrinen avaruus. Mitä voit sanoa (X, d):stä?

p5. Osoita, että euklidisen tason osajoukko $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x, x/n) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0,1]\}$ on yhtenäinen. Osoita, että $\overline{E}$ on yhtenäinen ja että sillä on sellainen ominaisuus, että on olemassa $x \in \overline{E}$ ja sillä ympäristö U, että $U \cap \overline{E}$ ei ole yhtenäinen. (Piirrä kuva!)

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 50 (eli 12.–16.12.).

t1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoot $\alpha\colon [0,1] \to X$ ja $\beta\colon [0,1] \to X$ sellaisia polkuja, että $\alpha(1) = \beta(0)$. (Piirrä kuva.) Osoita, että kuvaus $\gamma\colon [0,1] \to X$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq 1/2, \\ \beta(2t-1), & t > 1/2, \end{cases}$$

on jatkuva ja siis polku.

t2. Osoita, että euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko $E = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ on polkuyhtenäinen. (*Vinkki:* **p1.** ja **t1.**)

t3. Olkoon (X, d) yhtenäinen metrinen avaruus ja olkoon $f\colon X \to \mathbb{R}$ sellainen jatkuva funktio, että jokaisella $x \in X$ on ympäristö, jossa f on vakio. Osoita, että f on vakiofunktio.

t4. Olkoon $n \geq 2$, ja olkoon $||\cdot||$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ normi. Osoita, että yksikköpallo $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| = 1\}$ on normiavaruuden $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ polkuyhtenäinen osajoukko. (*Vinkki:* Aloita osoittamalla, että $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on polkuyhtenäinen $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$:ssä. Huomaa, että normia $||\cdot||$ ei oleteta euklidiseksi normiksi.)

t5. Olkoon $n \geq 1$ ja $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, missä $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon ||x||_2 = 1\}$. Osoita, että on olemassa sellainen $x_0 \in S^n$, jolle pätee $f(x_0) = f(-x_0)$. (*Vinkki:* Edellinen tehtävä. Tarkastele funktiota $g\colon S^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f(-x)$.)

t6. Olkoon $E = \{f \in C([0,1]) \colon |f(1)| = 1\}$.

(a) Osoita, että E on metrisen avaruuden $(C([0,1]), d_\infty)$ epäyhtenäinen osajoukko.

(b) (Vaikeahko) Osoita, että E on metrisen avaruuden $(C([0,1]), d_1)$ polkuyhtenäinen osajoukko. (*Vinkki:* Jos joukko on yhdiste kahdesta polkuyhtenäisestä osajoukosta A ja B, riittää löytää yksi polku joukosta A joukkoon B. Kirjoita E yhdisteenä joukoista $E_1 = \{g \in E \colon g(1) = 1\}$ ja $E_2 = \{g \in E \colon g(1) = -1\}$. Osoita joukot E_1 ja E_2 polkuyhtenäisiksi. Etsi tämän jälkeen sellainen polku $\gamma \colon [0,1] \to E$, että $\gamma(0) \in C([0,1])$ on vakiofunktio $x \mapsto -1$ ja $\gamma(1) \in C([0,1])$ funktio $x \mapsto 2x - 1$.)