HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotuksia

t1. Ovatko seuraavat joukot $A_j \subset \mathbb{R}^3$ (a) kompakteja (b) täydellisiä:

(a) $A_1 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 4\}$,
(b) $A_2 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 \leq 4\}$ ja
(c) $A_3 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 + z^2 < 4\}$.

(*Vinkki:* Esitä kohdissa (a) ja (b) joukko sopivana alkukuvana.)

Ratkaisu:

(a) (A_1 on sekä täydellinen että kompakti) Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kuvaus $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Koska f on jatkuva, niin $A_1 = f^{-1}(]-\infty, 4])$ on suljettu joukko. Koska $\mathbb{R}^3$ on täydellinen ja A_1 suljettu, niin A_1 on täydellinen (Lause 12.6). Koska jokaisella $(x, y, z) \in A_1$ pätee

$$||(x, y, z)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3} \leq \sqrt{x^2 + 3y^3 + z^2} \leq 2,$$

niin A_1 on myös rajoitettu. Koska A_1 on suljettu ja rajoitettu $\mathbb{R}^3$:n osajoukko, niin se on kompakti (Lause 13.14).

(b) (A_2 on täydellinen mutta ei kompakti) Olkoon nyt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funktio $(x, y, z) \mapsto x^2 + 3y^2$. Koska jälleen f on jatkuva, niin $A_2 = f^{-1}(]-\infty, 4])$ on suljettu. Näin ollen A_2 on täydellinen (Lause 12.6). Toisaalta, koska jokaisella $n \in \mathbb{N}$ piste $(0, 0, n)$ kuuluu joukkoon A_2, niin A_2 ei ole rajoitettu. Näin ollen A_2 ei ole kompakti (Lause 13.14).

(c) (A_3 ei ole täydellinen eikä kompakti) Koska A_3 ei ole suljettu (esimerkiksi $(0, 0, 2) \in \overline{A_3} \setminus A_3$), niin A_3 ei ole täydellinen (Lause 12.6) eikä kompakti (Lause 13.14).

t2. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja olkoot $A \subset X$ ja $A' \subset Y$ kompakteja osajoukkoja.

(a) Osoita, että $A \times A'$ on kompakti osajoukko metrisessä avaruudessa $(X \times Y, e_0)$.
(b) Osoita, että $A \times A'$ on kompakti osajoukko, kun metriikkana on e_1 tai e_2.

Metriikat e_0, e_1 ja e_2 kuten luvussa 10.

Ratkaisu:

(a) Valitaan jono $z_n \in A \times A'$, missä $z_n = (x_n, y_n)$. Koska A on kompakti, jonolla x_n on osajono x_{n_i}, joka suppenee kohti alkiota $x \in A$. Koska A' on kompakti, jonolla y_{n_i} on osajono $y_{n_{i_j}}$, joka suppenee kohti alkiota $y \in A'$.

Osoitetaan, että $z_{n_{i_j}} = (x_{n_{i_j}}, y_{n_{i_j}})$ suppenee kohti alkiota $z = (x, y)$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan j_0 siten, että $d(x_{n_{i_j}}, x) < \varepsilon$ ja $d(y_{n_{i_j}}, y) < \varepsilon$ kun $j > j_0$. Tällöin

$$e_0(z_{n_{i_j}}, z) = \max(d(x_{n_{i_j}}, x), d'(y_{n_{i_j}}, y)) < \varepsilon$$

kun $j \geq j_0$, mikä osoittaa väitteen.

(b) Kirjan luvussa 10 on osoitettu, että metriikat e_0, e_1 ja e_2 ovat ekvivalentit. Siten identtinen kuvaus $\mathrm{id}_{X\times Y}$ on jatkuva $(X\times Y, e_0)\to(X\times Y, e_1)$ ja $(X\times Y, e_0)\to(X\times Y, e_2)$. Tällöin metriikoissa e_1 ja e_2 joukko $A\times A'$ on kompaktin joukon $A\times A'$ kuva jatkuvassa kuvauksessa $\mathrm{id}_{X\times Y}$. Siten $A\times A'$ on kompakti myös metriikoilla e_1 ja e_2.

t3. Olkoon $f\colon (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)\to(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$ jatkuva kuvaus, jolla on ominaisuus, että jokaisella $\varepsilon>0$ on olemassa sellainen $M>0$, että $||f(x)||_2<\varepsilon$, kun $||x||_2\geq M$. Osoita, että on olemassa sellainen $x_0\in\mathbb{R}^n$, että $||f(x)||_2\leq||f(x_0)||_2$. (*Vinkki:* Tarkastele ensin yhdistettyä kuvausta $x\mapsto||f(x)||_2$.)

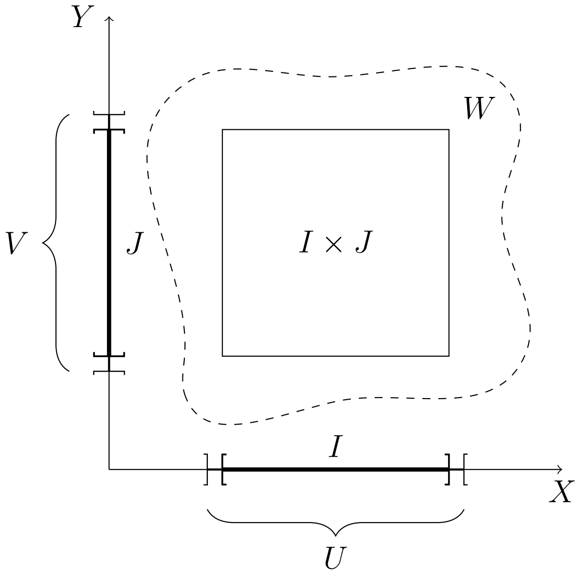
Ratkaisu: Tarkastellaan kuvausta $g:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$, $x\mapsto||f(x)||_2$. Kuvaus g on yhdiste jatkuvista kuvauksista f ja $x\mapsto||x||_2$, joten se on jatkuva. Nyt jokaisella $\varepsilon>0$ on olemassa sellainen $M>0$, että $|g(x)|<\varepsilon|$ kun $||x||\geq M$. Jos $|g(x)|=0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}^n, x\neq\overline{0}$, niin voidaan asettaa $x_0=\overline{0}$. Muussa tapauksessa valitaan jokin sellainen piste $x'\in\mathbb{R}^n$, että $x'\neq\overline{0}$ ja $g(x')>0$. Olkoon nyt $\varepsilon=g(x')=||f(x')||_2$. On siis olemassa sellainen $M>0$, että $||f(x)||_2<||f(x')||_2$, aina kun $||x||_2\geq M$.
Jos $x\in(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ ja $x<M$,

$$x\in B_{d_2}(\overline{0},M)\subset\overline{B_{d_2}(\overline{0},M)}=\{y\in\mathbb{R}^n\mid ||y||_2\leq M\}.$$

Joukko $\overline{B_{d_2}(\overline{0},M)}$ on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu ja rajoitettu osajoukko, joten se on kompakti. Siis jatkuva kuvaus $g:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ saa suurimman arvon y joukossa $\overline{B_{d_2}(\overline{0},M)}$. Olkoon $x''\in\overline{B_{d_2}(\overline{0},M)}$ jokin piste, jolle pätee $g(x'')=||f(x)||_2=y$.
Jos $||f(x')||_2\leq||f(x'')||_2$, voidaan valita $x_0=x''$. Jos taas $||f(x'')||_2<||f(x')||_2$, valitaan $x_0=x'$. Kummassakin tapauksessa, kaikilla $x\in\mathbb{R}^n$ pätee joko $||x||_2\geq M$, jolloin $||f(x)||_2\leq||f(x')||_2\leq||f(x_0)||_2$, tai $x\in\overline{B_{d_2}(\overline{0},M)}$, jolloin $||f(x)||_2\leq||f(x'')||_2\leq||f(x_0)||_2$. Siis $||f(x)||_2\leq||f(x_0)||_2$.

t4. Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia sekä $I\subset X$ ja $J\subset Y$ kompakteja osajoukkoja. Olkoon W joukon $I\times J$ ympäristö metrisessä avaruudessa $(X\times Y, e_0)$, eli W on avoin joukko, joka sisältää tulojoukon $I\times J$. Osoita, että on olemassa avoimet joukot $U\subset X$ ja $V\subset Y$ siten, että $I\subset U$, $J\subset V$ ja $U\times V\subset W$. (*Vinkki:* Piirrä kuva. Jos $W\neq X\times Y$, niin osoita ensin, että $e_0(I\times J,(X\times Y)\setminus W)>0$.)

Ratkaisu: Otetaan ensin triviaalit tapaukset. Jos $W=X\times Y$, niin tällöin tietysti X ja Y avoimina joukkoina toteuttavat väitteen. Toisaalta jos I ja J ovat tyhjiä joukkoja, voidaan valita $U=I$ ja $V=J$.



Hahmotelma väitteestä tilanteessa $X = Y = \mathbb{R}$.

Oletetaan että $W \neq X \times Y$ ja joukot I, J epätyhjiä. Joukon W komplementti $\complement W$ on epätyhjä ja suljettu, ja koska $I \times J$ on kompaktien joukkojen tulona kompakti (L13.16 ja **t2.**), niin saadaan lauseen 13.23 nojalla joukkojen välinen etäisyys $\epsilon = e_0(I \times J, \complement W) > 0$. Siispä jos jollekin pisteelle $z \in X \times Y$ pätee $e_0(I \times J, z) < \epsilon$, niin $z \in W$.

Rakennetaan nyt joukot $U \subset X$ ja $V \subset Y$. Todetaan ensin, että joukoilla I ja J ylipäänsä on jotkin avoimet peitteet: nimittäin avoimen joukon projektio on avoin, joten olkoot W_X, W_Y joukon W (avoimet) projektiot joukoille X ja Y. Olkoon sitten $U \subset W_X$ avoin osajoukko siten, että $d(u, I) < \epsilon$ kaikilla $u \in U$. Tällöin $I \subset U$. Vastaavasti olkoon $V \subset W_Y$ avoin osajoukko siten, että $d(v, J) < \epsilon$ kaikilla $v \in V$, jolloin myös $J \subset V$. Tällöin $U \times V \subset W$, sillä kaikilla $z = (u, v) \in U \times V$ etäisyys $e_0(I \times J, z) < \epsilon$, joten z ei voi kuulua komplementtijoukkoon $\complement W$.

t5. Osoita, että seuraavat euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukot ovat epäyhtenäisiä:

(a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 1\}$,

(b) $F = E \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 0\}$.

(*Vinkki:* Etsi sellaisia tason avoimia joukkoja U ja V, että $A = U \cap X$ ja $B = U \cap X$ osoittavat epäyhtenäisyyden, missä X on joko E tai F.)

Ratkaisu:

(a) Koska $xy = 1$ kaikilla $(x, y) \in E$, niin $E \cap \{0\} \times \mathbb{R} = \varnothing$. Näin ollen

$$E \subset (]-\infty, 0[\times \mathbb{R}) \cup (]0, \infty[\times \mathbb{R}).$$

Olkoot $U =]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$ ja $V =]0, \infty[\cup \mathbb{R}$. Tällöin $A = U \cap E$ ja $B = V \cap E$ ovat avoimia E:ssä ja toteuttavat ehdot $A \cup B = E$ ja $A \cap B \subset U \cap V = \varnothing$. Lisäksi $(1, 1) \in A$ ja $(-1, -1) \in B$, joten A ja B ovat epätyhjiä. Näin ollen E ei ole yhtenäinen.

(b) Etsitään tason $\mathbb{R}^2$ avoimet pistevieraat joukot U ja V, joille pätee $E \subset U$ ja $L \subset V$, missä $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 0\}$.

Huomataan ensin, että $L = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$. Valitaan nyt joukot

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |xy| > 1/2\}$$

ja

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{U}.$$

Selvästi $E \subset U$. Toisaalta U on alkukuva $f^{-1}(]1/2, \infty[)$, kun $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus $(x, y) \mapsto |xy|$. Näin ollen U on avoin.
Koska $\overline{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |xy| \geq 1/2\}$, niin $L \cap \overline{U} = \varnothing$. Näin ollen $L \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{U} = V$. Lisäksi V on avoin joukko, koska se on suljetun joukon komplementti. Näin ollen $A = U \cap F = E$ ja $B = V \cap F = L$ ovat halutut joukot. Joukko F on siis epäyhtenäinen.