HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 5

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

p1. Olkoon $L = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ suora tasossa $\mathbb{R}^2$. Tarkista, että L on (a) suljettu, (b) täydellinen, (c) ei kompakti.

p2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A, A' \subset X$ kompakteja osajoukkoja. Osoita, että $A \cup A'$ on kompakti.

p3. Osoita, että $E = S^1((1, 0), 1) \cup S^1((-1, 0), 1) \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti.

p4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja (x_n) suppeneva jono X:ssä. Olkoon $\hat{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$. Osoita, että joukko $E = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\hat{x}\}$ on kompakti.

p5. Osoita preppaustehtävän **p4.** joukko E kompaktiksi avointen peitteiden avulla.

p6. Osoita, että euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ joukot $E = S^1((1, 0), 1/2) \cup S^1((-1, 0), 1/2)$ ja $F = B^2((1, 0), 1) \cup B^2((-1, 0), 1)$ ovat epäyhtenäisiä.

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 49 (eli 5.–9.12.).

t1. Ovatko seuraavat joukot $A_j \subset \mathbb{R}^3$ (a) kompakteja (b) täydellisiä:

(a) $A_1 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 4\}$,
(b) $A_2 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 \leq 4\}$ ja
(c) $A_3 = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 + z^2 < 4\}$.

(*Vinkki:* Esitä kohdissa (a) ja (b) joukko sopivana alkukuvana.)

t2. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja olkoot $A \subset X$ ja $A' \subset Y$ kompakteja osajoukkoja.

(a) Osoita, että $A \times A'$ on kompakti osajoukko metrisessä avaruudessa $(X \times Y, e_0)$.
(b) Osoita, että $A \times A'$ on kompakti osajoukko, kun metriikkana on e_1 tai e_2.

Metriikat e_0, e_1 ja e_2 kuten luvussa 10.

t3. Olkoon $f : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$ jatkuva kuvaus, jolla on ominaisuus, että jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $M > 0$, että $||f(x)||_2 < \varepsilon$, kun $||x||_2 \geq M$. Osoita, että on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{R}^n$, että $||f(x)||_2 \leq ||f(x_0)||_2$. (*Vinkki:* Tarkastele ensin yhdistettyä kuvausta $x \mapsto ||f(x)||_2$.)

t4. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia sekä $I \subset X$ ja $J \subset Y$ kompakteja osajoukkoja. Olkoon W joukon $I \times J$ ympäristö metrisessä avaruudessa $(X \times Y, e_0)$, eli W on avoin joukko, joka sisältää tulojoukon $I \times J$. Osoita, että on olemassa avoimet joukot $U \subset X$ ja $V \subset Y$ siten, että $I \subset U$, $J \subset V$ ja $U \times V \subset W$. (*Vinkki:* Piirrä kuva. Jos $W \neq X \times Y$, niin osoita ensin, että $e_0(I \times J, (X \times Y) \setminus W) > 0$.)

t5. Osoita, että seuraavat euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukot ovat epäyhtenäisiä:

(a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 1\}$,

(b) $F = E \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 0\}$.

(*Vinkki:* Etsi sellaisia tason avoimia joukkoja U ja V, että $A = U \cap X$ ja $B = U \cap X$ osoittavat epäyhtenäisyyden, missä X on joko E tai F.)