HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 4 – Ratkaisuehdotuksia

t1. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ laskeva jono suljettuja epätyhjiä osajoukkoja. Osoita, että leikkaus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on epätyhjä. (*Vinkki:* Valitse aluksi jokaisesta joukosta A_n alkio x_n ja perustele preppaustehtävä **p2.**.)

Ratkaisu: Valitaan aluksi jono (x_n) valitsemalla jokaisella $n \in \mathbb{N}$ piste $x_n \in A_n$. Tämä voidaan tehdä, koska A_n on epätyhjä jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Koska (X, d) on kompakti metrinen avaruus, niin jonolla (x_n) on suppeneva osajono (x_{k_n}). Olkoon $\hat{x} \in X$ tämän osajonon raja-arvo, eli $x_{k_n} \to \hat{x}$. Osoitetaan, että $\hat{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Riittää osoittaa, että $\hat{x} \in A_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Koska $k_n \geq n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja $A_{k_n} \subset A_n$, niin riittää itseasiassa osoittaa, että $\hat{x} \in A_{k_n}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Koska $x_{k_m} \in A_{k_m} \subset A_{k_n}$ jokaisella $m \geq n$, niin $x_{k_m} \in A_{k_n}$ jokaisella $m \geq n$. Näin ollen jonon (x_{k_n}) raja-arvo $\hat{x}$ kuuluu joukon A_{k_n} sulkeumaan. Koska A_{k_n} on suljettu, niin $\hat{x} \in A_{k_n}$. Väite on näin osoitettu.

t2. Olkoon $f_v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus $x \mapsto x/3$ ja olkoon $f_o \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus $x \mapsto 1 - x/3$. Olkoon lisäksi $A_1 = [0, 1]$ ja $A_{n+1} = f_v(A_n) \cup f_o(A_n)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Merkitään $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

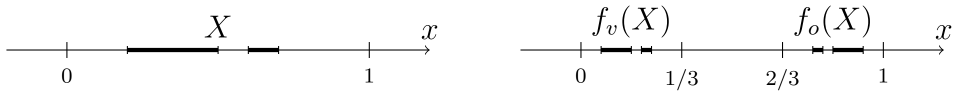
(a) Piirrä kuva joukoista $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (Niin pitkälle kuin pystyt.)

(b) Osoita, että A on kompakti ja epätyhjä. (*Vinkki:* Käytä tehtävää **t1.** ja perustele preppaustehtävä **p4.**.)

(*Kommentti:* Joukkoa A kutsutaan Cantorin joukoksi. Kuvaukset f_v ja f_o muodostavat ns. affiinin dynaamisen systeemin. Cantorin joukko A on tämän dynaamisen systeemin kiintopiste. Joukon A voi myös tulkita fraktaaliksi.)

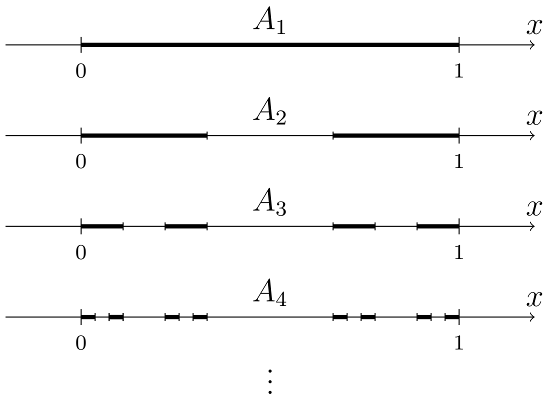
Ratkaisu:

(a) Huomataan, että f_v skaalaa kuvajoukon yhteen kolmasosaan, jolloin kuvajoukko päätyy välin vasempaan päätyyn. Lisäksi huomataan, että f_o tekee ensin saman skaalauksen ja sitten peilaa joukon yksikkövälin keskipisteen suhteen, tuottaen peilikuvan välin oikeaan päätyyn.



Esimerkkikuva funktioiden f_v ja f_o käyttäytymisestä.

Tämän geometrisen käyttäytymisen perusteella voidaan piirtää kuvat joukoista A_n.



Joukot A_n arvoilla $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Idea on käyttää tehtävää **t1.** ja preppaustehtävää **p4.**. Osoitetaan, että joukot A_n ovat kompakteja ja epätyhjiä, sekä $A_{n+1} \subset A_n$ kaikilla n. Huomaa, että metristen avaruuksien kompaktit osajoukot ovat aina suljettuja (Väisälä 13.6). Tällöin siis A_n on laskeva jono epätyhjiä suljettuja joukkoja kompaktissa avaruudessa A_1, jolloin $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ on epätyhjä kompakti joukko.

Osoitetaan halutut jonon A_n ominaisuudet induktiolla. Perustapauksena $A_1 = [0, 1]$ on $\mathbb{R}$:n epätyhjä suljettu ja rajoitettu osajoukko, jolloin se on myös kompakti (Väisälä 13.14). Lisäksi $f_v(A_1) = [0, 1/3] \subset A_1$ ja $f_o(A_1) = [2/3, 1] \subset A_1$, joten $A_2 = f_v(A_1) \cup f_o(A_1) \subset A_1$.

Induktioaskeleessa oletetaan, että A_n on kompakti ja epätyhjä, sekä $A_{n+1} \subset A_n$. Koska kompaktin joukon jatkuva kuva on kompakti (Väisälä 13.18), joukot $f_v(A_n)$ ja $f_o(A_n)$ ovat kompakteja. Tällöin $A_{n+1} = f_v(A_n) \cup f_o(A_n)$ on kompakti, sillä se on kahden $\mathbb{R}$:n suljetun ja rajoitetun osajoukon yhdiste, joka on aina suljettu ja rajoitettu $\mathbb{R}$:ssä. Lisäksi A_{n+1} on epätyhjä, sillä $f_v(A_n) \subset A_{n+1}$ on epätyhjän joukon kuvajoukkona epätyhjä.

Lopuksi osoitetaan, että $A_{n+2} \subset A_{n+1}$. Olkoon $x \in A_{n+2}$. Joukon A_{n+2} määritelmän nojalla $x = f_v(y)$ tai $x = f_o(y)$ jollakin $y \in A_{n+1}$. Induktio-oletuksen nojalla $A_{n+1} \subset A_n$, joten $y \in A_n$. Näin ollen $x \in f_v(A_n) \cup f_o(A_n) = A_{n+1}$, mikä osoittaa väitteen.

t3. Anna esimerkki rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q}$ osajoukosta A, joka on rajoitettu ja suljettu, mutta ei ole kompakti. (*Kommentti:* Tämä on esimerkki siitä, että kirjan lauseessa 13.14 on olennaista, että avaruus on juuri $\mathbb{R}^n$.)

Ratkaisu: Osoitetaan, että joukko $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ toteuttaa vaaditut ehdot. Selkeästi A on rajoitettu, koska $d(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in \mathbb{Q}\} = |1 - 0| = 1$. Toisaalta, koska $[0, 1]$ on suljettu $\mathbb{R}$:ssä, niin $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ on suljettu $\mathbb{Q}$:ssä. Näin ollen A on rajoitettu ja suljettu. Osoitetaan nyt että A ei ole kompakti.

Olkoon $\hat{x}$ irrationaaliluku välillä $[0, 1]$, eli $\hat{x} \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. (Voidaan valita vaikkapa $\hat{x} = \sqrt{2}/2$.) Olkoon nyt (x_n) jono joukossa A, joka suppee pisteeseen $\hat{x}$ reaaliakselilla. (Tämä jono voidaan valita vaikkapa seuraavasti. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ siten, että $\hat{x} \in]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$. Valitaan nyt $x_n = k/2^n \in A$. Tällä valinnalla $|\hat{x} - x_n| < 2^{-n}$. Näin ollen $x_n \to \hat{x}$.)

Osoitetaan vielä, että jonolla (x_n) ei ole osajonoa, joka suppenee joukossa A. Jos tälläinen osajono (x_{k_n}) olisi olemassa, niin $x_{k_n} \to \hat{x}' \in A$. Koska myös $x_{k_n} \to \hat{x}$, niin raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $\hat{x}' = \hat{x}$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä $\hat{x} \notin A$.

t4. (Täydellisyys vs. kompaktius.) Edellisten harjoitusten perusteella metrinen avaruus $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ on täydellinen, eli sen jokainen Cauchy-jono suppenee. Osoita, että suljettu kuula $\overline{B}_{d_\infty}(0,1)$ ei kuitenkaan ole kompakti.

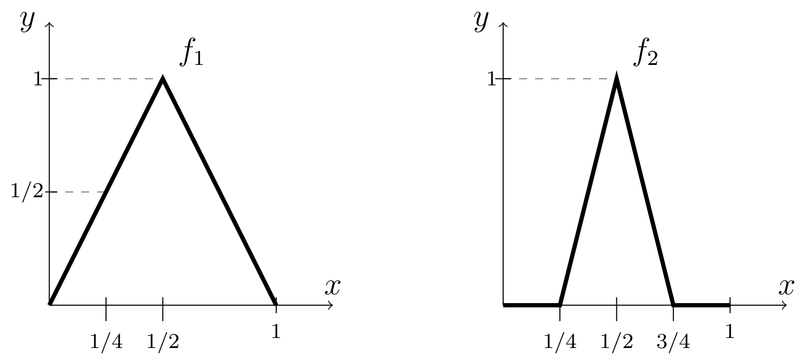
(*Vinkki:* Tarkastele kutistuvien hattufunktioiden jonoa (f_n), jonka alkiot saavat kaikki arvon $f_n(x) = 1$ pisteessä $x = 1/2$, eli $f_n(x) = \max\{1 - |2nx - n|, 0\}$. Osoita ensin, että (f_n) on jono joukossa $\overline{B}_{d_\infty}(0,1)$. Osoita sitten että mielivaltaiselle osajonolle (f_{k_n}) pätee, että jokaisella $n_0 \in \mathbb{N}$ on olemassa $n \geq n_0$ siten, että $||f_{k_n} - f_{k_{n_0}}||_\infty \geq 1/2$. Osoita tämän avulla, että ei ole olemassa sellaista jatkuvaa funktioita $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, joka olisi jonon (f_{k_n}) raja-arvo, eli jolle $||f - f_{k_n}||_\infty \to 0$.)

Ratkaisu: Joukko on kompakti jos sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Tarkoitus on siis osoittaa, että jonon (f_n) mielivaltainen osajono (f_{k_n}) ei suppene suljetussa kuulassa $\overline{B}_{d_\infty}(0,1)$. Tämä pätee mikäli (f_{k_n}) ei ole Cauchy.

Jatkuvat funktiot muotoa

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + 2nx - n & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2}] \\ 1 - 2nx + n & x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

kuuluvat suljettuun kuulaan $\overline{B}_{d_\infty}(0,1)$, sillä kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $d_\infty(f_n, 0) = ||f_n||_\infty = 1$. Kuitenkin pisteittäin $f_k(x) \leq f_n(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$ kun $k > n$.



Funktioiden f_n graafit kun $n = 1, 2$.

Olkoon (f_{k_n}) mielivaltainen osajono. Osoitetaan että se ei ole Cauchy: siis on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että kaikilla $N \in \mathbb{N}$ on olemassa jokin $n \geq N$ jolla $d_\infty(f_{k_N}, f_{k_n}) \geq \epsilon$. Olkoon $\epsilon = 1/2$ ja $N \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan etäisyyttä

$$d_\infty(f_{k_N}, f_{k_n}) = ||f_{k_N} - f_{k_n}||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_{k_N}(x) - f_{k_n}(x)|.$$

Huomataan että indeksillä $k_n = 2k_N$

$$|f_{k_N}(x) - f_{2k_N}(x)| = 1/2$$

pisteessä $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4k_N}$. Siispä, koska $f_k(x) \leq f_n(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$ kun $k > n$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_{k_N}(x) - f_{k_n}(x)| \geq 1/2$$

jos $k_n \geq 2k_N$, ja koska (f_{k_n}) on osajono, tällainen indeksi n on aina löydettävissä. Näin ollen $d_\infty(f_{k_N}, f_{k_n}) \geq 1/2$ joten osajono (f_{k_n}) ei ole Cauchy eikä siis suppene. Koska jonon (f_n) mielivaltainen osajono ei suppene, suljettu kuula $\overline{B}_{d_\infty}(0,1)$ ei ole kompakti.

t5. Olkoon $X = [-1,1]\times[-1,1]$ tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko ja d euklidisen metriikan rajoittuma joukkoon X. Olkoon $S(X)$ kaikkien joukon X suljettujen epätyhjien osajoukkojen joukko eli $S(X) = \{A \subset X \colon A \neq \varnothing \text{ on suljettu}\}$. Määritellään $d_S \colon S(X) \times S(X) \to [0,\infty[$ kaavalla

$$d_S(A, A') = \inf\{\varepsilon > 0 \colon A \subset B_d(A', \varepsilon) \text{ ja } A' \subset B_d(A, \varepsilon)\}.$$

(Tässä $B_d(E, r) = \{x \in X \colon d(x, E) < r\}$ kaikilla $E \in S(X)$ ja $r > 0$)

(a) Osoita, että d_S on metriikka joukossa $S(X)$.

(b) Onko d_S metriikka, jos $X = \mathbb{R}^2$?

(c) Entä onko d_S metriikka, jos joukon $S(X)$ sijaan tarkastellaan joukon X kaikkien osajoukkojen joukkoa $\mathscr{P}(X)$? (Tässä jälleen $X = [-1,1] \times [-1,1]$.)

(*Kommentti:* Metriikkaa d_S kutsutaan joukon $S(X)$ Hausdorffin metriikaksi. Funktio d_S määrittelee metriikan kaikilla kompakteilla metrisillä avaruuksilla (X, d). Myös metrinen avaruus $(S(X), d_S)$ on kompakti.)

Ratkaisu:

(a) Näytetään ensin, että kuvaus d_S on hyvin määritelty. Olkoon siis $A, A' \in S(X)$. Nyt joukko $E = \{\varepsilon > 0 \colon A \subset B_d(A', \varepsilon) \text{ ja } A' \subset B_d(A, \varepsilon)\}$ on alhaalta rajoitettu, joten infimum $d_S(A, A') = \inf\{\varepsilon > 0 \colon A \subset B_d(A', \varepsilon) \text{ ja } A' \subset B_d(A, \varepsilon)\}$ on olemassa, jos pystymme näyttämään, että joukko E on epätyhjä. Joukko X on rajoitettu, joten sen läpimitta $d(X)$ on jokin positiivinen reaaliluku. Tällöin pätee $A \subset B_d(A', d(X))$ ja $A' \subset B_d(A, d(X))$, sillä minkä tahansa kahden avaruuden X pisteen etäisyys on alle $d(X)$. Siis $d(X) \in E$, eikä joukko E ole siis tyhjä. Täten $d_S(A, A')$ on olemassa ja äärellinen.

Näytetään seuraavaksi, että metriikan aksioomat pätevät kuvaukselle d_S. Olkoon tätä varten $A, A', A'' \in S(X)$ avaruuden X suljettuja osajoukkoja.

- (M1): Merkitään $E_1 = \{\varepsilon > 0 \colon A \subset B_d(A', \varepsilon) \text{ ja } A' \subset B_d(A, \varepsilon)\}$ ja $E_2 = \{\varepsilon > 0 \colon A' \subset B_d(A'', \varepsilon) \text{ ja } A'' \subset B_d(A', \varepsilon)\}$. Olkoon $\varepsilon_1 \in E_1$ ja $\varepsilon_2 \in E_2$. Tällöin jos $a \in A$, niin on olemassa $a' \in A'$, jolle pätee $d(a, a') < \varepsilon_1$ joukon E_1 määritelmän nojalla. Vastaavasti on olemassa $a'' \in A''$, jolle pätee $d(a', a'') < \varepsilon_2$. Täten kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(a, a'') \leq d(a, a') + d(a', a'') < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

$a \in A$ oli mielivaltainen ja $a'' \in A''$, joten $A \subset B_d(A'', \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.
Vastaavasti jos $a'' \in A''$ on mielivaltainen, niin voidaan löytää $a' \in A'$, jolle pätee $d(a'', a') < \varepsilon_2$ ja tätä pistettä a' kohti voidaan löytää piste $a \in A$, jolle pätee $d(a', a) < \varepsilon_1$. Siis kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(a'', a) \leq d(a'', a') + d(a', a) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Siis $A'' \subset B_d(A, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.
Nyt siis $A \subset B_d(A'', \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ ja $A'' \subset B_d(A, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, joten $d(A, A'') \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. $\varepsilon_1 \in E_1$ ja $\varepsilon_2 \in E_2$ olivat mielivaltaisia, joten ottamalla infimumit näiden joukkojen yli saadaan

$$d(A, A'') \leq \inf_{\varepsilon_1 \in E_1} \varepsilon_1 + \inf_{\varepsilon_2 \in E_2} \varepsilon_2 = d(A, A') + d(A', A'').$$

- (M2): Selvä.
- (M3): Oletetaan ensiksi, että $d_S(A, A') = 0$. Tällöin siis jokaisella $\varepsilon > 0$ pätee $A \subset B_d(A', \varepsilon)$ ja $A' \subset B_d(A, \varepsilon)$. Siis jos $a \in A$, niin koska $A \subset B_d(A', \varepsilon)$ jokaisella $\varepsilon > 0$, niin jokainen kuula $B_d(a, \varepsilon)$ sisältää pisteen $a' \in A'$. Siis $a \in \overline{A'}$. Mutta A' oli suljettu joukko, joten $\overline{A'} = A'$, eli $a \in A'$. $a \in A$ oli mielivaltainen, joten $A \subset A'$.
  Vastaavasti jos $a' \in A'$ on joukon A' piste, niin jokainen kuula $B_d(a', \varepsilon)$ sisältää jonkun pisteen $a \in A$, joten $a' \in \overline{A} = A$. Siis $A' \subset A$. Yhdistämällä nämä huomiot saadaan, että $A = A'$.
  Toisaalta, jos $A = A'$, niin jokaisella $\varepsilon > 0$ pätee $A \subset B_d(A', \varepsilon)$ ja $A' \subset B_d(A, \varepsilon)$, koska $A \subset A'$ ja $A' \subset A$, joten $d_S(A, A') < \varepsilon$. $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, joten $d_S(A, A') = 0$.

Täten d_S on joukon $S(X)$ metriikka.

(b) Osoitetaan, että d_S ei ole hyvin määritelty kuvaus $S(X) \times S(X) \to [0, \infty[$, kun $X = \mathbb{R}^2$. Valitaan joukot $A = \mathbb{R}^2$ ja $A' = \{0\}$. Tällöin joukot A ja A' ovat suljettuja, eli $A, A' \in S(X)$. Huomataan, että $B_d(A', \varepsilon) = B_d(0, \varepsilon)$ jokaisella $\varepsilon > 0$. Nyt ei ole olemassa sellaista reaalilukua $\varepsilon > 0$, että pätisi $\mathbb{R}^2 = A \subset B_d(A', \varepsilon) = B_d(0, \varepsilon)$, sillä $\mathbb{R}^2$ ei ole rajoitettu joukko. Täten $d_S(A, A') = \infty$, eikä d_S ole siis hyvin määritelty kuvaus tässä tapauksessa.

(c) Nyt siis tutkitaan kuvausta $d_S \colon \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) \to \mathbb{R}$, joka on määritelty samalla kaavalla kuin tehtävänannossa. Aivan samalla tavalla kuin (a)-kohdassa nähdään, että kuvaus d_S on hyvin määritelty ja että metriikan aksioomat (M1) ja (M2) pätevät.

Sen sijaan aksiooma (M3) ei enää päde; on olemassa joukot $A, A' \in \mathscr{P}(X)$, joille pätee $d_S(A, A') = 0$, vaikka $A \neq A'$. Valitaan $A = X = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ja $A' = [-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\}$. Nyt jos $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin tietysti pätee $A' \subset B_d(A, \varepsilon)$, sillä $A' \subset A$. Toisaalta nyt pätee $\overline{A'} = A$, joten jokaisella $a \in A$ pätee, että $B_d(a, \varepsilon) \cap A' \neq \emptyset$. Siis $a \in B_d(A', \varepsilon)$. Tämä pätee kaikilla $a \in A$, joten $A \subset B_d(A', \varepsilon)$.

$\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, joten $d_S(A, A') = 0$, vaikka $A \neq A'$, eikä (M3) siis päde.

(Hyvin määriteltyä kuvausta, joka toteuttaa metriikan aksioomat (M1) ja (M2), mutta ei välttämättä ehtoa (M3), kutsutaan pseudometriikaksi. Täten d_S on joukon $\mathscr{P}(X)$ pseudometriikka.)