HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 4

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

p1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja (x_n) suppeneva jono, jolla on raja-arvo $\hat{x} \in X$. Varmista, että osaat osoittaa, että jokainen osajono (x_{k_n}) suppee pisteeseen $\hat{x}$.

p2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $A \subset X$ osajoukko ja (x_n) suppeneva jono metrisessä avaruudessa, jolla on osajono (x_{k_n}) joukossa A, eli $x_{k_n} \in A$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että jonon (x_n) raja-arvo $\hat{x}$ kuuluu joukon A sulkeumaan $\overline{A}$.

p3. Olkoon (X, d) kompaktiavaruus ja $A \subset X$ osajoukko. Perustele, että ∂A on kompakti osajoukko.

p4. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ laskeva jono suljettuja epätyhjiä osajoukkoja. Osoita, että leikkaus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on kompakti.

p5. Olkoon $X =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ ja d euklidisen metriikan rajoittuma joukkoon X. Totea, että (X, d) on rajoitettu metrinen avaruus ja että joukko X on suljettu (X, d):ssä, mutta että (X, d) ei ole kompakti. (*Kommentti:* Kirjan lauseessa 13.14 on siis olennaista, että avaruus on juuri $\mathbb{R}^n$.)

p6. Osoita, että avaruudessa $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ osajoukko $S^{n-1}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y||_2 = r\}$ on kompakti kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. (*Vinkki:* Muista, että alkukuva $f^{-1}E$ on suljettu, jos f on jatkuva kuvaus ja E on suljettu.)

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 48 (eli 28.11–2.12.).

t1. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ laskeva jono suljettuja epätyhjiä osajoukkoja. Osoita, että leikkaus $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on epätyhjä. (*Vinkki:* Valitse aluksi jokaisesta joukosta A_n alkio x_n ja perustele preppaustehtävä **p2.**.)

t2. Olkoon $f_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus $x \mapsto x/3$ ja olkoon $f_o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus $x \mapsto 1 - x/3$. Olkoon lisäksi $A_1 = [0, 1]$ ja $A_{n+1} = f_v(A_n) \cup f_o(A_n)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Merkitään $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(a) Piirrä kuva joukoista $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (Niin pitkälle kuin pystyt.)

(b) Osoita, että A on kompakti ja epätyhjä. (*Vinkki:* Käytä tehtävää **t1.** ja perustele preppaustehtävä **p4.**.)

(*Kommentti:* Joukkoa A kutsutaan Cantorin joukoksi. Kuvaukset f_v ja f_o muodostavat ns. affiinin dynaamisen systeemin. Cantorin joukko A on tämän dynaamisen systeemin kiintopiste. Joukon A voi myös tulkita fraktaaliksi.)

t3. Anna esimerkki rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q}$ osajoukosta A, joka on rajoitettu ja suljettu, mutta ei ole kompakti. (*Kommentti:* Tämä on esimerkki siitä, että kirjan lauseessa 13.14 on olennaista, että avaruus on juuri $\mathbb{R}^n$.)

t4. (Täydellisyys vs. kompaktius.) Edellisten harjoitusten perusteella metrinen avaruus $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ on täydellinen, eli sen jokainen Cauchy-jono suppenee. Osoita, että suljettu kuula $\overline{B}_{d_\infty}(0,1)$ ei kuitenkaan ole kompakti.

(*Vinkki:* Tarkastele kutistuvien hattufunktioiden jonoa (f_n), jonka alkiot saavat kaikki arvon $f_n(x) = 1$ pisteessä $x = 1/2$, eli $f_n(x) = \max\{1 - |2nx - n|, 0\}$. Osoita ensin, että (f_n) on jono joukossa $\overline{B}_{d_\infty}(0,1)$. Osoita sitten että mielivaltaiselle osajonolle (f_{k_n}) pätee, että jokaisella $n_0 \in \mathbb{N}$ on olemassa $n \geq n_0$ siten, että $||f_{k_n} - f_{k_{n_0}}||_\infty \geq 1/2$. Osoita tämän avulla, että ei ole olemassa sellaista jatkuvaa funktioita $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, joka olisi jonon (f_{k_n}) raja-arvo, eli jolle $||f - f_{k_n}||_\infty \to 0$.)

t5. Olkoon $X = [-1,1]\times[-1,1]$ tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko ja d euklidisen metriikan rajoittuma joukkoon X. Olkoon $S(X)$ kaikkien joukon X suljettujen epätyhjien osajoukkojen joukko eli $S(X) = \{A \subset X\colon A \neq \varnothing \text{ on suljettu}\}$. Määritellään $d_S\colon S(X) \times S(X) \to [0,\infty[$ kaavalla

$$d_S(A, A') = \inf\{\varepsilon > 0\colon A \subset B_d(A', \varepsilon) \text{ ja } A' \subset B_d(A, \varepsilon)\}.$$

(Tässä $B_d(E, r) = \{x \in X\colon d(x, E) < r\}$ kaikilla $E \in S(X)$ ja $r > 0$)

(a) Osoita, että d_S on metriikka joukossa $S(X)$.

(b) Onko d_S metriikka, jos $X = \mathbb{R}^2$?

(c) Entä onko d_S metriikka, jos joukon $S(X)$ sijaan tarkastellaan joukon X kaikkien osajoukkojen joukkoa $\mathscr{P}(X)$? (Tässä jälleen $X = [-1,1] \times [-1,1]$.)

(*Kommentti:* Metriikkaa d_S kutsutaan joukon $S(X)$ Hausdorffin metriikaksi. Funktio d_S määrittelee metriikan kaikilla kompakteilla metrisillä avaruuksilla (X,d). Myös metrinen avaruus $(S(X), d_S)$ on kompakti.)