HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 3 – Ratkaisuehdotuksia

t1. Olkoon (x_n) Cauchy-jono metrisessä avaruudessa (X, d) ja $a \in X$. Osoita, että on olemassa sellainen $M > 0$, että $x_n \in B_d(a, M)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.[1]

Ratkaisu: Koska (x_n) on Cauchy-jono, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x_m) < 1$ kaikilla $n.m \geq n_0$. Erityisesti siis $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ kaikilla $n \geq n_0$. Näin ollen

$$d(a, x_n) \leq d(a, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_n) < d(a, x_{n_0}) + 1$$

kaikilla $n \geq n_0$. Toisaalta, koska pisteitä $x_1, \ldots, x_{n_0}$ on vain äärellinen määrä, niin

$$M = \max\{d(a, x_1), \ldots, d(a, x_{n_0})\} + 1$$

on olemassa ja äärellinen. Nyt $d(a, x_n) \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

t2. Olkoon (x_n) Cauchy-jono $\mathbb{R}$:ssä. Olkoot

$$a_n = \inf_{m \geq n} x_m \quad \text{ja} \quad b_n = \sup_{m \geq n} x_m$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

(a) Osoita, että jono (a_n) on kasvava Cauchy-jono ja $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$.

(b) Osoita, että jono (b_n) on laskeva Cauchy-jono ja $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n b_n$.

Ratkaisu: Ratkaisua varten tarvitsemme preppaustehtävää **p1.**, joten osoitetaan ensin se:

Olkoon jono (x_n) kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Ylhäältä rajoitetulla joukolla on olemassa pienin yläraja $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = y$, jolloin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $y - \epsilon < x_N$. Koska $x_n \geq x_k$ kun $n > k$, niin kaikille $n > N$ pätee $d(y, x_n) < \epsilon$, mistä seuraa $x_n \to y$.

Olkoon jono (x_n) sitten laskeva ja alhaalta rajoitettu. Alhaalta rajoitetulla joukolla on olemassa suurin alaraja $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = a$, jolloin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $a + \epsilon > x_N$. Koska $x_n \leq x_k$ kun $n > k$, niin kaikille $n > N$ pätee $d(a, x_n) < \epsilon$, mistä seuraa $x_n \to a$.

(a) Jono (a_n) on kasvava: jos $k > n$, niin

$$\{x_m : m \geq k\} \subset \{x_m : m \geq n\},$$

jolloin joko $\inf_{m \geq k} x_m = \inf_{m \geq n} x_m$, tai joukossa $\{x_m : m \geq n\}$ on alkio a siten että $a < \inf_{m \geq k} x_m$. Näin ollen $\inf_{m \geq k} x_m \geq \inf_{m \geq n} x_m$, ja siispä $a_k \geq a_n$ kun $k > n$.

Jono (x_n) on Cauchy-jonona rajoitettu, jolloin sillä on myös reaaliset suurin alaraja $\inf_n x_n$ ja pienin yläraja $\sup_n x_n$. Siispä myös (a_n) on (erityisesti ylhäältä) rajoitettu, joten preppaustehtävän **p1.** nojalla (a_n) suppenee. Siis erityisesti (a_n) on Cauchy-jono ja sen raja-arvo on $\sup_n a_n$.

[1] Cauchy-jono on siis aina rajoitettu.

(b) Kuten aiempi, mutta nyt jono (b_n) on laskeva: jos $k > n$, niin

$$\{x_m : m \geq k\} \subset \{x_m : m \geq n\},$$

jolloin $\sup_{m \geq k} x_m \leq \sup_{m \geq n} x_m$. Siispä $a_k \leq a_n$ kun $k > n$.

Samoin (b_n) on (erityisesti alhaalta) rajoitettu, suppeneva ja siten Cauchy, ja sen raja-arvo on $\inf_n b_n$.

t3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ täydellinen osajoukko (eli (A, d_A) on täydellinen metrisenä avaruutena). Osoita, että A on X:n suljettu osajoukko.

Ratkaisu: Olkoon (x_n) jono joukon A alkioita, mikä suppenee pistettä $x \in X$ kohti avaruudessa (X, d). (x_n) on suppeneva jono metriikassa d, ja siis Cauchy metriikassa d (Lause 12.3.). Koska $d(x_n, x_m) = d_A(x_n, x_m)$ kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$, niin (x_n) on Cauchy-jono myös avaruudessa (A, d_A). (A, d_A) on täydellinen avaruus, joten jono (x_n) suppenee jotain pistettä $y \in A$ kohti metriikassa d_A. Mutta toisaalta pätee $d_A(x_n, y) = d(x_n, y)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten (x_n) suppenee pistettä y kohti myös avaruudessa (X, d). Nyt (x_n) suppenee sekä pistettä x että y kohti avaruudessa (X, d), joten raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla (Lause 11.4.) täytyy olla $x = y$. Siis $x \in A$.

Olemme siis näyttäneet, että jos (x_n) on jono joukon A alkioita, mikä suppenee jotain pistettä $x \in X$ kohti metriikassa d, niin tällöin piste x on joukon A alkio. Täten A on avaruuden (X, d) suljettu osajoukko (Seuraus 11.7.).

t4. (a) Osoita, että $(C([0, 1]), || \cdot ||_\infty)$ on täydellinen normiavaruus.[2] (*Vinkki:* Tarvitset $\mathbb{R}$:n täydellisyyttä.)

(b) Osoita, että $(C[0, 1]), || \cdot ||_1)$ ei ole täydellinen. (*Vinkki:* Etsi jonoa (f_n) jatkuvia funktioita, joka suppenee pisteittäin kohti epäjatkuvaa funktiota. Vertaa edellisten harjoitusten tehtäviin.)

Ratkaisu:

(a) Olkoon (f_i) Cauchy-jono avaruudessa $(C([0, 1]), || \cdot ||_\infty)$. Huomaa, että jos $x \in [0, 1]$, saadaan arvio

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f_i(t) - f_j(t)| = \|f_i - f_j\|_\infty.$$

Täten jokaisella $x \in [0, 1]$ jono $(f_i(x))$ on Cauchy, ja sillä on $\mathbb{R}$:n täydellisyyden nojalla raja-arvo. Voidaan siis määritellä funktio $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x) = \lim_{i \to \infty} f_i(x).$$

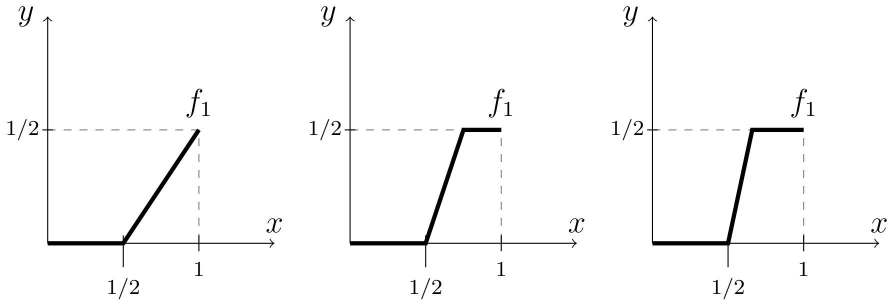
Osoitetaan seuraavaksi, että $f_i \to f$ tasaisesti. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Koska (f_j) on Cauchy, voidaan valita sellainen n_ε, että $\|f_i - f_j\|_\infty < \varepsilon$, aina kun $i, j \geq n_\varepsilon$. Tällöin kaikilla x pätee $|f_i(x) - f_j(x)| < \varepsilon$, mikä voidaan $\mathbb{R}$:n kuulien avulla muotoilla $f_j(x) \in B_{d_E}(f_i(x), \varepsilon)$. Koska $f_j(x) \to f(x)$ ja suljetut joukot sisältävät jonojensa raja-arvot, saadaan $f(x) \in \overline{B}_{d_E}(f_i(x), \varepsilon)$. Koska tämä pätee kaikilla x, saadaan siis $\|f_i - f\|_\infty \leq \varepsilon$ kun $i \geq n_\varepsilon$.

Näin ollen $f_i \to f$ tasaisesti, jolloin kirjan lauseen 11.24. perusteella $f \in C([0, 1])$. Koska suppeneminen $\|\cdot\|_\infty$-normissa tarkoittaa täsmälleen tasaista suppenemista, f on (f_i):n raja-arvo avaruudessa $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. Siten avaruus on täydellinen.

[2] Normiavaruus $(V, || \cdot ||)$ on täydellinen, jos vastaava metrinen avaruus (V, d) on täydellinen, missä d on normin antama metriikka.

(b) Etsitään avaruudesta Cauchy-jono, jolla ei ole raja-arvoa. Olkoon

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{n}{2} + nx, & \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < x \leq 1 \end{cases}.$$



Funktioiden f_n graafit kun $n = 1, 2, 3$.

Funktiot f_n voi helposti tarkistaa jatkuviksi. Lisäksi funktioille pätee kaikilla $x \in [0,1]$ arvio $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$. Näin saadaan integraaliarvio

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\min(n,m)}} |f_n(t) - f_m(t)| \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\min(n,m)}.$$

Tämän nojalla jono (f_n) on Cauchy.

Tehdään nyt vastaoletus, että jonolla (f_n) on jatkuva rajafunktio f. Nähdään, että kaikilla $n \geq 1$ pätee

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)| \, \mathrm{d}t \leq \|f - f_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Lisäksi kaikilla $m \geq 1$ ja $n \geq m$ pätee

$$\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}}^{1} \left| f(t) - \frac{1}{2} \right| \mathrm{d}t \leq \|f - f_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Tästä voidaan analyysin tietojen avulla päätellä, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 1/2]$, ja $f(x) = 1/2$ kaikilla $x \in [1/2 + 1/(2m), 1]$ kun m on positiivinen kokonaisluku. Jälkimmäisen preusteella $f(x) = 1/2$ aina kun $1/2 < x \leq 1$. Tämä on ristiriita, sillä f on tällöin epäjatkuva pisteessä $1/2$.

t5. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia, $A \subset X$ ja $f : \overline{A} \to Y$ jatkuva kuvaus, joka on tasaisesti jatkuva A:ssa (eli $f|_A : A \to Y$ on tasaisesti jatkuva). Osoita, että f on tasaisesti jatkuva. (*Vinkki:* Jos $a, b \in \overline{A}$ ja $\delta > 0$, niin on olemassa pisteet $a', b' \in A$ joille $d(a, a') < \delta/3$ ja $d(b, b') < \delta/3$. Sopivan δ:n saat tasaisesta jatkuvuudesta.)

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Haluamme löytää sellaisen reaaliluvun $\delta > 0$, että kaikilla sellaisilla pisteillä $x, y \in \overline{A}$, joilla $d(x, y) < \delta$, pätee $d'\left(f(x, f(y))\right) < \epsilon$.

Koska f on tasaisesti jatkuva A:ssa, on olemassa sellainen $\delta' > 0$, että jos $x', y' \in A$ ja $d(x', y') < \delta'$, niin $d'\left(f(x'), f(y')\right) < \frac{\varepsilon}{3}$. Olkoon nyt $x, y \in \overline{A}$ ja $d(x, y) < \frac{\delta'}{3}$. Koska f on jatkuva pisteessä x, on olemassa sellainen $\delta_x > 0$, että jos $z \in \overline{A}$ ja $d(x, z) < \delta_x$, niin $d'\left(f(x), f(z)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$. Koska $x \in \overline{A}$, voidaan valita sellainen piste $x' \in A$, että $d(x, x') < \min\{\frac{\delta'}{3}, \delta_x\}$. Tällöin $d'\left(f(x), f(x')\right) < \frac{\varepsilon}{3}$. Vastaavasti koska f

on jatkuva pisteessä y, on olemassa sellainen $\delta_y > 0$, että jos $z \in \overline{A}$ ja $d(y,z) < \delta_y$, niin $d'\left(f(y), f(z)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$. Koska $y \in \overline{A}$, taas voidaan valita sellainen piste $y' \in A$, että $d(y,y') < \min\{\frac{\delta'}{3}, \delta_y\}$. Siis $d'\left(f(y), f(y')\right) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Metriikan kolmioepäyhtälön perusteella pätee

$$d(x',y') \leq d(x,x') + d(x,y) + d(y,y') < \frac{\delta'}{3} + \frac{\delta'}{3} + \frac{\delta'}{3} = \delta'.$$

Tästä seuraa, että $d\left(f(x'), f(y')\right) < \frac{\varepsilon}{3}$, koska $x', y' \in A$.

Metriikan kolmioepäyhtälöstä saadaan siis epäyhtälö

$$d'\left(f(x), f(y)\right) \leq d'\left(f(x), f(x')\right) + d'\left(f(x'), f(y')\right) + d'\left(f(y), f(y')\right) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Asetetaan $\delta = \frac{\delta'}{3}$. Nyt jos $x, y \in \overline{A}$ ja $d(x,y) < \delta$, pätee $d'\left(f(x, f(y))\right) < \epsilon$. Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, f on tasaisesti jatkuva joukossa $\overline{A}$.

t6. [Extra; tämä tehtävä ei korota laskuharjoitustehtävien kokonaismäärää; ratkaisu palautetaan kirjallisesti laskuharjoitustenpitäjälle.] Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja olkoon $\mathrm{Cauchy}(X)$ kaikkien avaruuden X Cauchy-jonojen joukko.

(a) Osoita, että funktio $d_C\colon \mathrm{Cauchy}(X) \times \mathrm{Cauchy}(X) \to [0,\infty[$, $d_C((x_n),(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$, on hyvin määritelty ja että toteuttaa kaikki muut metriikan ehdot kuin (M3):n.[3]

(b) Olkoon $\sim$ sellainen relaatio, että $(x_n) \sim (y_n)$, jos $d_C((x_n),(y_n)) = 0$. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $\mathrm{Cauchy}(X)$.

(c) Merkitään $[(x_n)] = \{(y_n) \in \mathrm{Cauchy}(X) \colon (y_n) \sim (x_n)\}$ jonon $(x_n) \in \mathrm{Cauchy}(X)$ ekvivalenssiluokkaa ja olkoon X^* relaation $\sim$ kaikkien ekvivalenssiluokkien joukko, eli $X^* = \mathrm{Cauchy}(X)/{\sim} = \{[(x_n)] \colon (x_n) \in \mathrm{Cauchy}(X)\}$. Osoita, että funktio $d^*\colon X^* \times X^* \to [0,\infty[$, $d^*([(x_n)],[(y_n)]) = d_C((x_n),(y_n))$, on hyvin määritelty metriikka joukossa X^*.

(d) Olkoon $\iota\colon X \to \mathrm{Cauchy}(X)$ se kuvaus, jolle $\iota(x)$ on vakiojono $n \mapsto x$, ja olkoon $\pi\colon \mathrm{Cauchy}(X) \to X^*$ kuvaus $(x_n) \mapsto [(x_n)]$. Osoita, että kuvaus $\pi \circ \iota\colon X \to X^*$ on isometria.[4]

(e) Olkoon $U \subset X^*$ epätyhjä avoin joukko. Osoita, että $U \cap (\pi\circ\iota)(X) \neq \emptyset$. Päättele, että $\overline{(\pi \circ \iota)(X))} = X^*$.

(f) Osoita, että (X^*, d^*) on täydellinen metrinen avaruus.

(g) Osoita, että on olemassa surjektiivinen isometria $f\colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{Q}^*, d^*)$, missä $(\mathbb{Q}^*, d^*)$ on täydellistymä rationaalilukujen joukosta $\mathbb{Q}$ varustettuna euklidisella metriikalla d. Päättele, että $\mathbb{R}$ ja $(\mathbb{Q}^*, d^*)$ ovat homeomorfisia.

Ratkaisu:

(a) Osoitetaan ensin, että d_C on hyvin määritelty. Tätä varten täytyy osoittaa raja-arvon $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ olemassaolo, jos (x_n) ja (y_n) ovat Cauchyn jonoja. Osoitetaan, että tällöin $(d(x_n,y_n))$ on Cauchyn jono.

---

[3] Eli d_C on *pseudometriikka.*

[4] Metristä avaruutta (X^*, d^*) kutsutaan avaruuden (X,d) täydellistymäksi.

Olkoon $\varepsilon > 0$, ja valitaan n_ε siten, että $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ ja $d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$ kun $n, m \geq n_\varepsilon$. Tällöin kun valitaan $n, m \geq n_\varepsilon$, kolmioepäyhtälöllä saadaan

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) < d(x_m, y_m) + \varepsilon,$$

josta seuraa $d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) < \varepsilon$. Tekemällä sama arvio toisin päin saadaan $d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) < \varepsilon$, ja yhdistämällä arviot itseisarvon määritelmään saadaan epäyhtälö $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon$. Tämän nojalla jono $(d(x_n, y_n))$ on Cauchy, ja sillä siten on hyvin määritelty reaalinen raja-arvo.

Kuvauksen d_C arvojen ei-negatiivisuus seuraa raja-arvoalkioiden $d(x_n, y_n)$ ei-negatiivisuudesta, ja ominaisuudet (M1) ja (M2) saadaan suoraan d:n vastaavista laskuilla

$$d_C((x_n), (y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = d_C((y_n), (x_n))$$

ja

$$\begin{aligned} d_C((x_n), (z_n)) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) \\ &= d_C((x_n), (y_n)) + d_C((y_n), (z_n)) \end{aligned}$$

(b) Todetaksemme, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio, on tarkistettava ekvivalenssirelaatiolta vaaditut kolme ehtoa:

(E1) Kaikilla alkioilla a pätee $a \sim a$.

(E2) Jos $a \sim b$, niin myös $b \sim a$.

(E3) Jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin myös $a \sim c$.

Ehto (E1) seuraa havaitsemalla, että

$$d_C((x_n), (x_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ehto (E2) seuraa suoraan d_C:n toteuttamasta ehdosta (M2). Ehtoa (E3) varten oletetaan $(x_n) \sim (y_n)$ ja $(y_n) \sim (z_n)$. Tällöin kolmioepäyhtälöllä

$$0 \leq d_C((x_n), (z_n)) \leq d_C((x_n), (y_n)) + d_C((y_n), (z_n)) = 0 + 0 = 0,$$

jolloin siis $d_C((x_n), (z_n)) = 0$ ja $(x_n) \sim (z_n)$, eli ehto (E3) toteutuu.

(c) Määritellään siis $d^*\colon X^* \times X^* \to [0, \infty[$ kaavalla $d^*([(x_n)], [(y_n)]) = d_C((x_n), (y_n))$. Ensimmäiseksi täytyy tarkistaa, että $d^*([(x_n)], [(y_n)])$ on riippumaton ekvivalenssiluokkien edustajista (x_n) ja (y_n).

Oletetaan siis, että $(x_n) \sim (x'_n)$ ja $(y_n) \sim (y'_n)$. Tällöin $d_C((x_n), (x'_n)) = 0$ ja $d_C((y_n), (y'_n)) = 0$. Kolmioepäyhtälöä käyttämällä saadaan

$$d_C((x_n), (y_n)) \leq d_C((x_n), (x'_n)) + d_C((x'_n), (y'_n)) + d_C((y'_n), (y_n)) = d_C((x'_n), (y'_n))$$

ja

$$d_C((x'_n), (y'_n)) \leq d_C((x'_n), (x_n)) + d_C((x_n), (y_n)) + d_C((y_n), (y'_n)) = d_C((x_n), (y_n)).$$

Siten $d_C((x_n), (y_n)) = d_C((x'_n), (y'_n))$, mikä osoittaa d^*:n riippumattomuuden ekvivalenssiluokkien edustajista.

Täytyy enää tarkistaa, että d^* on metriikka. Ehdot (M1) ja (M2) seuraavat suoraan d_C:n vastaavista. Ehto (M3) seuraa päättelyllä

$$\begin{aligned}
&d^*([(x_n)],[(y_n)]) = 0 \\
&\Leftrightarrow d_C((x_n),(y_n)) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x_n) \sim (y_n) \\
&\Leftrightarrow [(x_n)] = [(y_n)].
\end{aligned}$$

(d) Olkoot $x, y \in X$. Tällöin kirjoittamalla määritelmät auki saadaan

$$\begin{aligned}
d^*(\pi \circ \iota(x), \pi \circ \iota(y)) &= d^*([\iota(x)],[\iota(y)]) \\
&= d_C(\iota(x), \iota(y)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(\iota(x)_n, \iota(y)_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x,y) \\
&= d(x,y).
\end{aligned}$$

Siten $\pi \circ \iota$ on isometria $(X,d) \to (X^*, d^*)$.

(e) Olkoon U epätyhjä ja avoin X^*:ssä. Tällöin on jokin Cauchyn jono (x_n) jolla $[(x_n)] \in U$, ja jokin $r > 0$ jolla $B_{d^*}([(x_n)], r) \subset U$. Valitaan Cauchyn jonon määritelmän nojalla sellainen n_0, että $d(x_n, x_m) < r/2$ kun $n, m \geq n_0$.

Osoitetaan nyt, että $\pi \circ \iota(x_{n_0}) \in U$. Tämä seuraa etäisyysarviosta

$$\begin{aligned}
d^*(\pi \circ \iota(x_{n_0}), [(x_n)]) &= d_C(\iota(x_{n_0}), (x_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_{n_0}, x_n) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} r/2 \\
&< r.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\pi \circ \iota(x_{n_0}) \in B_{d^*}([(x_n)], r) \subset U$, mikä osoittaa väitteen. Koska jokaisen $[(x_n)] \in X^*$ jokainen ympäristö kohtaa joukkoa $\pi \circ \iota(X)$, seuraa tästä sulkeuman määritelmällä, että $\overline{\pi \circ \iota(X)} = X^*$.

(f) Osoitetaan, että (X^*, d^*) on täydellinen. Pitää siis osoittaa, että jokaisella avaruuden X^* Cauchy-jonolla (c_n) on raja-arvo $\hat{c} \in X^*$.

Olkoon (c_n) Cauchy-jono (X^*, d^*):ssä, eli $c_n \in X^*$ on X:n Cauchy-jonojen ekvivalenssiluokka jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Valitaan nyt jokaisella n Cauchy-jono $x_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ metrisessä avaruudessa X, joka kuuluu ekvivalenssiluokkaan c_n seuraavasti. Olkoon $x'_n = (x'_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-jono avaruudessa X, joka kuuluu ekvivalenssiluokkaan c_n, eli $[x'_n] = c_n$. Tällöin induktiolla x'_n:lle voidaan valita osajono (x'_{n,m_k}), jolle pätee $d(x'_{n,m_k}, x'_{n,m_\ell}) < 2^{-p}$ kaikilla $p \in \mathbb{N}$ ja $k, \ell \geq p$. Asetetaan nyt $x_n = (x'_{n,m_p})_{p\in\mathbb{N}}$. Huomaa, että näillä valinnoilla $d(x_{n,k}, x_{n,\ell}) < 2^{-p}$ kaikilla $k, \ell \geq p$. Huomaa myös, että $d_C(x_n, x_m) = d^*(c_n, c_m)$ jokaisella $n, m \in \mathbb{N}$.

Valitaan nyt uusi X:n jono $(\hat{x}_n)$ seuraavasti. Valitaan ensin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ indeksi $k_n \in \mathbb{N}$ siten, että $k_n \geq k_{n-1}$ ja $d(x_{n,k}, x_{n,k'}) < 2^{-n}$ kun $k, k' \geq k_n$. Asetetaan nyt $\hat{x}_n = x_{n,k_n}$ ja huomataan, että

Osoitetetaan, että $\hat{x} = (\hat{x}_n)$ on Cauchy-jono X:ssä ja että $c_n \to [\hat{x}]$ metrisessä avaruudessa (X^*, d^*). Tällöin $\hat{c} = [\hat{x}]$ on haluttu raja-arvo.

Aloitetaan osoittamalla, että $\hat{x}$ on Cauchy-jono X:ssä. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (c_n) on Cauchy-jono X^*:ssä, niin on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d_C(x_n, x_m) = d^*(c_n, c_m) < \varepsilon/4$ kaikilla $n, m \geq n_0$.

Olkoot nyt $n, m \geq n_0$ ja kiinnitetään $\ell \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|d_C(x_n, x_m) - d(x_{n,\ell}, x_{m,\ell})| < \varepsilon/4.$$

Jonojen x_n valinnan perusteella

$$\begin{aligned}
&|d(x_{n,\ell}, x_{m,\ell}) - d(x_{n,k_n}, x_{m,k_m})| \\
&\quad \leq |d(x_{n,\ell}, x_{m,\ell}) - d(x_{n,\ell}, x_{m,k_m})| + |d(x_{n,\ell}, x_{m,k_m}) - d(x_{n,k_m}, x_{m,k_m})| \\
&\quad \leq d(x_{m,\ell}, x_{m,k_m}) + d(x_{n,\ell}, x_{n,k_m}) \\
&\quad < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
d(\hat{x}_n, \hat{x}_m) &= d(x_{n,k_n}, x_{m,k_m}) \\
&\leq d_C(x_n, x_m) + |d_C(x_n, x_m) - d(x_{n,\ell}, x_{m,\ell})| \\
&\qquad + |d(x_{n,\ell}, x_{m,\ell}) - d(x_{n,k_n}, x_{m,k_m})| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

kaikilla $n, n \geq n_0$. Jono $\hat{x} = (\hat{x}_n)$ on siis Cauchy-jono.

Osoitetaan vielä, että $[x_n] \to [\hat{x}]$. Pitää siis osoittaa, että $d_C(\hat{x}, x_n) \to 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $2^{-n_0} < \varepsilon/2$. Huomaa, että jonojen x_n valintojen perusteella nyt $d(x_{n,k_n}, x_{n,m}) < \varepsilon/2$ kaikilla $n, m \geq n_0$.

Valitaan $m_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(\hat{x}_m, \hat{x}_n) < \varepsilon/2$ kaikilla $m, n \geq m_0$.

Olkoot $m, n \geq \max\{n_0, m_0\}$. Nyt

$$\begin{aligned}
d(\hat{x}_m, x_{n,m}) &= d(x_{m,k_m}, x_{n,m}) \\
&\leq d(x_{m,k_m}, x_{n,k_n}) + d(x_{n,k_n}, x_{n,m}) \\
&\leq d(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + 2^{-n_0} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$d^*([\hat{x}], c_n) = d_C(\hat{x}, x_n) = \lim_{\ell \to \infty} d(\hat{x}_\ell, x_{n,\ell}) \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siispä $c_n \to [\hat{x}]$. Avaruus (X^*, d^*) on siis täydellinen.

(g) Olkoot $\iota \colon \mathbb{Q} \to \text{Cauchy}(\mathbb{Q})$ ja $\pi \colon \text{Cauchy}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^*$ kuvauksia kuten kohdassa (d). Tällöin samaisen (d) kohdan perusteella kuvaus $\pi \circ \iota \colon (\mathbb{Q}, |\cdot|) \to (\mathbb{Q}^*, d^*)$ on isometria. Koska isometria on tasaisesti jatkuva ja $(\mathbb{Q}^*, d^*)$ on täydellinen, niin kuvauksella $\pi \circ \iota$ on Väisälän kirjan lauseen 12.15 perusteella jatkuva jatke $f \colon (\overline{Q}, |\cdot|) \to (\mathbb{Q}^*, d^*)$. Koska $\overline{Q} = \mathbb{R}$, niin ensimmäisen väitteen osoittamiseksi riittää osoittaa, että f on surjektiivinen isometria.

Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Koska jokaisella reaaliakselin avoimella välillä on olemassa rationaaliluku, niin on olemassa Cauchy-jonot (x_n) ja (y_n) siten, että $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n \to x$ sekä $y_n \to y$. Jatkuvuuden perusteella, $f(x_n) \to f(x)$ ja $f(y_n) \to f(y)$. Koska $\pi \circ \iota$ on isometria, niin

$$d^*(f(x_n), f(y_n)) = d^*((\pi \circ \iota)(x_n), (\pi \circ \iota)(y_n)) = |x_n - y_n| \to |x - y|$$

kun $n \to \infty$. Toisaalta, $d^*(f(x_n), f(y_n)) \to d^*(f(x), f(y))$, joten

$$d^*(f(x), f(y)) = |x - y|.$$

Näin ollen f on isometria.

Osoitetaan nyt, että f on surjektio. Olkoon $[(x_n)] \in \mathbb{Q}^*$, missä $(x_n) \in \text{Cauchy}(\mathbb{Q})$. Koska (x_n) on Cauchy-jono $\mathbb{R}$:ssä ja $\mathbb{R}$ on täydellinen, on olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n \to x$. Osoitetaan, että $f(x) = [(x_n)]$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (x_n) on Cauchy-jono, on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ kaikilla $n, m \geq n_0$. Näin ollen

$$d^*((\pi \circ \iota)(x_m), [(x_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Näin ollen

$$d^*(f(x_m), [(x_n)]) = d^*(\pi \circ \iota(x_m), [(x_n)]) \to 0,$$

kun $m \to \infty$. Koska f on jatkuva, niin $f(x_n) \to f(x)$. Näin ollen $f(x) = [(x_n)]$. Kuvaus f on siis surjektio.

Todetaan vielä, että f on homeomorfismi. Koska f on bijektiivinen isometria, on myös käänteiskuvaus $f^{-1}\colon (\mathbb{Q}^*, d^*) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ isometria. Tämä päätellään seuraavasti. Olkoot $[(x_n)], [(y_n)] \in \mathbb{Q}^*$. Koska f on isometria, niin

$$|f^{-1}([(x_n)]) - f^{-1}([(y_n)])| = d^*(f(f^{-1}([(x_n)])), f(f^{-1}([(y_n)]))) = d^*([(x_n)], [(y_n)]).$$

Eli f^{-1} on isometria. Näin ollen myös kääteiskuvaus on jatkuva.