HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 3

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

p1. Olkoon (x_n) reaalilukujono. Osoita seuraavat väitteet:

(a) Jos (x_n) kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin $x_n \to \sup\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Jos (x_n) laskeva ja alhaalta rajoitettu, niin $x_n \to \inf\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

p2. Olkoon $A = [0, \infty[\times \mathbb{R}$. Varmista, että (A, d_A) on täydellinen, kun d_A on tason $\mathbb{R}^2$ metriikan d_∞ rajoittuma joukkoon A.

p3. Olkoon X äärellinen joukko ja d metriikka X:ssä. Tarkista, että (X, d) on täydellinen metrinen avaruus.

p4. Mitkä seuraavista jonoista

(a) $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$:den jono (x_n), missä $x_n = ((-1)^n, 1/n)$,

(b) $(\mathbb{R}^3, ||\cdot||_\infty)$:den jono (x_n), missä $x_n = (\sin(1/n), \cos(1/n), 1 - 1/n)$,

(c) $(C([0,1]), ||\cdot||_1)$:den jono (f_n), missä $f_n(x) = d(x, \{0,1\})/n$

ovat Cauchy-jonoja?

p5. Mitkä seuraavista funktioista

(a) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$,

(b) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$,

(c) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{1/3}$,

ovat tasaisesti jatkuvia?

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 47 (eli 21.11–25.11.).

t1. Olkoon (x_n) Cauchy-jono metrisessä avaruudessa (X, d) ja $a \in X$. Osoita, että on olemassa sellainen $M > 0$, että $x_n \in B_d(a, M)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.[1]

t2. Olkoon (x_n) Cauchy-jono $\mathbb{R}$:ssä. Olkoot

$$a_n = \inf_{m \geq n} x_m \quad \text{ja} \quad b_n = \sup_{m \geq n} x_m$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

(a) Osoita, että jono (a_n) on kasvava Cauchy-jono ja $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$.

(b) Osoita, että jono (b_n) on laskeva Cauchy-jono ja $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n b_n$.

[1] Cauchy-jono on siis aina rajoitettu.

t3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ täydellinen osajoukko (eli (A, d_A) on täydellinen metrinen avaruus, missä d_A on metriikan d rajoittuma joukkoon A). Osoita, että A on metrisen avaruuden (X, d) suljettu osajoukko.

t4. (a) Osoita, että $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ on täydellinen normiavaruus.[2] (*Vinkki:* Tarvitset $\mathbb{R}$:n täydellisyyttä.)

(b) Osoita, että $(C[0,1]), ||\cdot||_1)$ ei ole täydellinen. (*Vinkki:* Etsi jonoa (f_n) jatkuvia funktioita, joka suppenee pisteittäin kohti epäjatkuvaa funktiota. Vertaa edellisten harjoitusten tehtäviin.)

t5. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia, $A \subset X$ ja $f\colon \overline{A} \to Y$ jatkuva kuvaus, joka on tasaisesti jatkuva A:ssa (eli $f|_A\colon A \to Y$ on tasaisesti jatkuva). Osoita, että f on tasaisesti jatkuva. (*Vinkki:* Jos $a, b \in \overline{A}$ ja $\delta > 0$, niin on olemassa pisteet $a', b' \in A$ joille $d(a, a') < \delta/3$ ja $d(b, b') < \delta/3$. Sopivan δ:n saat tasaisesta jatkuvuudesta.)

t6. [Extra; tämä tehtävä ei korota laskuharjoitustehtävien kokonaismäärää; ratkaisu palautetaan kirjallisesti laskuharjoitustenpitäjälle.] Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $\mathrm{Cauchy}(X)$ kaikkien avaruuden X Cauchy-jonojen joukko.

(a) Osoita, että funktio $d_C\colon \mathrm{Cauchy}(X) \times \mathrm{Cauchy}(X) \to [0, \infty[$, $d_C((x_n), (y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, on hyvin määritelty ja että toteuttaa kaikki muut metriikan ehdot kuin (M3):n.[3]

(b) Olkoon $\sim$ sellainen relaatio, että $(x_n) \sim (y_n)$, jos $d_C((x_n), (y_n)) = 0$. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $\mathrm{Cauchy}(X)$.

(c) Merkitään $[(x_n)] = \{(y_n) \in \mathrm{Cauchy}(X)\colon (y_n) \sim (x_n)\}$ jonon $(x_n) \in \mathrm{Cauchy}(X)$ ekvivalenssiluokkaa ja olkoon X^* relaation $\sim$ kaikkien ekvivalenssiluokkien joukko, eli $X^* = \mathrm{Cauchy}(X)/\!\sim\; = \{[(x_n)]\colon (x_n) \in \mathrm{Cauchy}(X)\}$. Osoita, että funktio $d^*\colon X^* \times X^* \to [0, \infty[$, $d^*([(x_n)], [(y_n)]) = d_C((x_n), (y_n))$, on hyvin määritelty metriikka joukossa X^*.

(d) Olkoon $\iota\colon X \to \mathrm{Cauchy}(X)$ se kuvaus, jolle $\iota(x)$ on vakiojono $n \mapsto x$, ja olkoon $\pi\colon \mathrm{Cauchy}(X) \to X^*$ kuvaus $(x_n) \mapsto [(x_n)]$. Osoita, että kuvaus $\pi \circ \iota\colon X \to X^*$ on isometria.

(e) Olkoon $U \subset X^*$ epätyhjä avoin joukko. Osoita, että $U \cap (\pi \circ \iota)(X) \neq \emptyset$. Päättele, että $\overline{(\pi \circ \iota)(X))} = X^*$.

(f) Osoita, että (X^*, d^*) on täydellinen metrinen avaruus.[4]

(g) Osoita, että on olemassa surjektiivinen isometria $f\colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{Q}^*, d^*)$, missä $(\mathbb{Q}^*, d^*)$ on täydellistymä rationaalilukujen joukosta $\mathbb{Q}$ varustettuna euklidisella metriikalla d. Päättele, että $\mathbb{R}$ ja $(\mathbb{Q}^*, d^*)$ ovat homeomorfisia.

[2] Normiavaruus $(V, ||\cdot||)$ on täydellinen, jos metrinen avaruus (V, d) on täydellinen, missä d on normin antama metriikka.

[3] Eli d_C on *pseudometriikka*.

[4] Metristä avaruutta (X^*, d^*) kutsutaan avaruuden (X, d) täydellistymäksi.