HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotuksia

t1. *Todista raja-arvon määritelmää ja kolmioepäyhtälöä käyttäen:* Olkoon $(V, ||\cdot||)$ normiavaruus.

(a) Osoita, että jos (x_k) ja (y_k) sellaisia jonoja V:ssä, että $x_k \to x$ ja $y_k \to y$, niin tällöin $x_k + y_k \to x + y$.

(b) Osoita, että jos (a_k) on sellainen reaalilukujono, että $a_k \to a$, ja että (x_k) on sellainen jono V:ssä, että $x_k \to x$, niin $a_k x_k \to ax$. [1]

Ratkaisu: Olkoon d normin $||\cdot||$ antama metriikka, eli $d(v,w) = ||v-w||$ kaikilla $v, w \in V$.

(a) Olkoon U pisteen $x+y$ ympäristö ja $\varepsilon > 0$ sellainen, että $B_d(x+y,\varepsilon) \subset U$. Koska $x_k \to x$, niin on olemassa $n_0 \geq 0$, jolle $x_k \in B_d(x, \varepsilon/2)$ kaikilla $k \geq n_0$. Vastaavasti, koska $y_k \to y$, niin on olemassa $m_0 \geq 0$, että $y_k \in B_d(y, \varepsilon/2)$ kaikilla $k \geq m_0$. Olkoon nyt $k_0 = \max\{n_0, m_0\}$. Tällöin

$$||(x_k+y_k)-(x+y)|| = ||(x_k-x)+(y_k-y)|| \leq ||x_k-x||+||y_k-y|| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Näin ollen $x_k+y_k \in B_d(x+y,\varepsilon) \subset U$ kaikilla $k \geq k_0$. Näin ollen $x_k+y_k \to x+y$.

(b) Oletetaan aluksi, että $a \neq 0$ ja $x \neq 0$.
Tehdään ensin havainto: Koska $a_k \to a$, niin on olemassa sellainen $k_1 \in \mathbb{N}$, että $|a_k - a| < |a|$ kaikilla $k \geq k_1$. Näin ollen

$$|a_k| = |a_k - a + a| \leq |a_k - a| + |a| < |a| + |a| = 2|a|$$

kaikilla $k \geq k_1$.
Olkoon nyt V pisteen ax ympäristö ja $\varepsilon > 0$ sellainen, että $B_d(ax,\varepsilon) \subset V$. Valitaan nyt sellainen $k_0' > 0$, että $||x_k - x|| < \varepsilon/(4|a|)$ kaikilla $k \geq k_0'$, ja valitaan sellainen $k_0'' > 0$, että $|a_k - a| < \varepsilon/(2||x||)$ kaikilla $k \geq k_0''$.
Valitaan $k_0 = \max\{k_0', k_0'', k_1\}$. Olkoon $k \geq k_0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
||a_k x_k - ax|| &= ||a_k x_k - a_k x + a_k x - ax|| \\
&\leq ||a_k x_k - a_k x|| + ||a_k x - ax|| \\
&\leq |a_k|\ ||x_k - x|| + |a_k - a|\ ||x|| \\
&\leq 2|a| \frac{\varepsilon}{4|a|} + \frac{\varepsilon}{2||x||} ||x|| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Näin ollen $a_k x_k \in B_d(ax,\varepsilon)$ kaikilla $k \geq k_0$.
Olemme siis päätelleet, että $ax_k \to ax$, kun $a \neq 0$ ja $x \neq 0$.
Käsitellään vielä erikoistapaus $x = 0$ ja $a \neq 0$. (Muut erikoistapaukset todistetaan samon kuin tämä.) Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $k_1 \in \mathbb{N}$ kuten yllä. Tällöin on olemassa sellainen $k_0 \geq k_1$, että $||x_k|| < \varepsilon/(2|a|)$. Tällöin

$$||a_k x_k|| = |a_k|\ ||x_k|| < 2|a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon$$

kaikilla $k \geq k_0$. Näin ollen $a_k x_k \to 0$.

[1] Tulos on Väisälän kirjassa todistettu ja tämän tehtävän tarkoituksena on antaa toinen todistus.

t2. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ kuvaus $x \mapsto \frac{x}{||x||_\infty}$. Merkitään myös

$$L_{x_0} = \{tx_0 \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$$

jokaisella $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(a) Osoita, että raja-arvo $\lim_{x\to 0, x\in L_{x_0}} f(x)$ on olemassa jokaisella $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(b) Osoita, että raja-arvoa $\lim_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa.

Ratkaisu:

(a) Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Tällöin jokaisella $t > 0$ saadaan

$$f(tx_0) = \frac{tx_0}{||tx_0||_\infty} = \frac{tx_0}{t||x_0||_\infty} = \frac{x_0}{||x_0||}.$$

Näin ollen $\lim_{x\to 0, x\in L_{x_0}} f(x) = f(x_0)$.

(b) Oletetaan, että $\lim_{x\to 0} f(x)$ on olemassa. Nyt (a)-kohdan perusteella

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0, x\in L_{x_0}} f(x) = f(x_0)$$

jokaisella $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Olkoot nyt $e_1 = (1,0,0)$ ja $e_2 = (0,1,0)$ vektoreita $\mathbb{R}^3$:ssa. Koska $||e_1||_\infty = ||e_2||_\infty = 1$, niin $f(e_1) = e_1$ ja $f(e_2) = e_2$. Koska $e_1 \neq e_2$, niin raja-arvo $\lim_{x\to 0} f(x)$ ei ole yksikäsitteinen. Tämä on ristiriita, joten raja-arvoa $\lim_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa.

t3. Olkoon $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ kuvaus, $A \subset X$ osajoukko ja $x_0 \in \overline{A}$. Oletetaan, että $y_0 = \lim_{x\to x_0, x\in A} f(x)$ on olemassa. Osoita, että $y_0 \in \overline{fA}$.

Ratkaisu: Tapa 1 (jonoilla): Koska $x_0 \in \overline{A}$, kirjan lauseen 11.6. nojalla on olemassa A:n jono (x_n), jolle pätee $x_n \to x_0$. Lauseen 11.29. antamalla raja-arvon jonomuotoilulla saadaan, että $f(x_n) \to y_0$.

Koska alkiot x_n ovat A:ssa, niiden kuvat $f(x_n)$ ovat $f(A)$:ssa. Siten $(f(x_n))$ on $f(A)$:n jono, joka suppenee kohti pistettä y_0. Käyttämällä taas kirjan lausetta 11.6. todetaan, että $y_0 \in \overline{f(A)}$.

Tapa 2 (ympäristöillä): Olkoon V pisteen y_0 mielivaltainen ympäristö. Raja-arvon määritelmän nojalla (kirjan kohta 11.26.) on olemassa pisteen x_0 ympäristö U, jolle $f(U \cap A) \subset V$. Koska $x_0 \in \overline{A}$, jokainen x_0:n ympäristö kohtaa joukkoa A. Eritoten ympäristöstä U löytyy $u \in U \cap A$. Tällöin $f(u) \in V$.

Lisäksi koska $u \in A$, $f(u) \in f(A)$. Täten V kohtaa joukkoa $f(A)$ pisteessä $f(u)$. Koska V oli mielivaltainen y_0:n ympäristö, jokainen y_0:n ympäristö kohtaa joukkoa $f(A)$, jolloin $y_0 \in \overline{f(A)}$.

t4. Palautetaan mieleen, että $C([0,1])$ on jatkuvien funktioiden $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ avaruus ja että funktio $||\cdot||_1 \colon C([0,1]) \to [0,\infty[$, $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$, on normi vektoriavaruudessa $C([0,1])$.

Tarkastellaan jonoja (f_n) normiavaruudessa $(C([0,1]), ||\cdot||_1)$.

(a) Anna esimerkki sellaisesta jonosta (f_n), että $||f_n||_1 \to 0$, mutta joka ei suppene pisteittäin kohti mitään välillä $[0,1]$ määriteltyä reaaliarvoista funktiota. (*Vinkki:* Anna ensin esimerkki sellaisesta jonosta (f_n), että $(f_n(x))$ ei suppene nollaa, jossain pisteessä x. Tarkastele tämän jälkeen yleisempää tilannetta.)

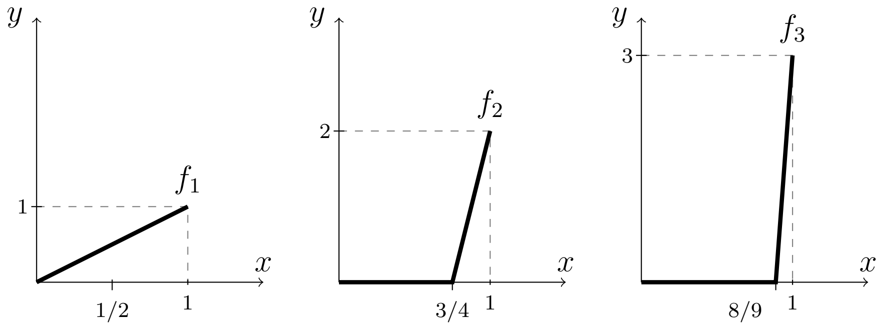
(b) Anna esimerkki sellaisesta jonosta (f_n), joka suppenee pisteittäin kohti jotakin funktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $||f_n||_1 \to 0$, mutta joka ei suppene tasaisesti kohti funktiota f.

Ratkaisu:

(a) Olkoon

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 - 1/n^2 \\ n - n^3 + n^3 x, & x > 1 - 1/n^2 \end{cases}$$

jolloin funktioilla f_n on oheisen kuvan mukaisia graafeja tasossa.



Funktioiden f_n graafit kun $n = 1, 2, 3$.

Nyt

$$||f_n||_1 = \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

mutta (f_n) ei suppene pisteessä $x = 1$, sillä $f_n(1) = n \to \infty$.

(b) Edellisen funktiojonon muunnelma

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 - 1/n \\ 1 - n + nx, & x > 1 - 1/n \end{cases}$$

antaa normille saman raja-arvon, ja lisäksi se suppenee pisteittäin, sillä nyt $f_n(1) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $f(n) \to f$, missä

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1[\\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

jolloin $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten (f_n) ei suppene tasaisesti. Huomaa, että f ei kuulu enää joukkoon $(C([0,1])$, sillä se ei ole jatkuva.[2]

t5. Olkoon (x_k) sellainen metrisen avaruuden (X, d) jono, että sen jokaisella osajonolla on suppeneva osajono, joka suppenee kohti pistettä $x \in X$. Osoita, että $x_k \to x$. (*Vinkki:* Vastaoletus.)

Ratkaisu: Tehdään vastaoletus, että jono (x_k) ei suppene kohti pistettä x. Tällöin on olemassa sellainen reaaliluku $\varepsilon > 0$, että kaikille $k \in \mathbb{N}$ voidaan löytää jokin $m_k \in \mathbb{N}$, jolle pätee $m_k > k$ ja

$$x_{m_k} \notin B_d(x, \varepsilon).$$

[2]Vastaava esimerkki saadaan vaikkapa funktioista $f_n(x) = x^n$.

Muodostetaan jono

$$(x_{m_k}) = x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots$$

seuraavasti: valitaan ensin m_1 siten, että $x_{m_1} \notin B_d(x, \varepsilon)$. Sen jälkeen valitaan sellainen m_2, että $m_2 > m_1$ ja $x_{m_2} \notin B_d(x, \varepsilon)$. Yleisesti valitaan m_{i+1} niin että $m_{i+1} > m_i$ ja $x_{m_{i+1}} \notin B_d(x, \varepsilon)$. Tämä on mahdollista, koska jono (x_k) ei suppene kohti pistettä x.

Koska $m_i < m_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, (x_{m_i}) on jonon (x_k) osajono. Oletuksen nojalla jonolla (x_{m_k}) on suppeneva osajono $\left(x_{m_{k_j}}\right)$, joka suppenee kohti pistettä x. On siis olemassa sellainen $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $j > j_\varepsilon$ pätee

$$x_{m_{k_j}} \in B_d(x, \varepsilon).$$

Tämä on ristiriita, koska jokainen $x_{m_{k_j}}$ on jonon (x_{m_k}) jäsen, joten $x_{m_{k_j}} \notin B_d(x, \varepsilon)$. Siis jono (x_k) suppenee kohti pistettä x.