HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 2

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

p1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ osajoukko. Varmista, että osaat osoittaa, että jos (x_n) on jono A:n pisteitä, joka suppenee avaruudessa (A, d_A), niin (x_n) suppenee X:ssä.

p2. Anna esimerkki tilanteesta, missä (X, d) on metrinen avaruus, $A \subset X$ osajoukko, (x_n) sellainen jono A:n pisteitä, joka suppenee X:ssä, mutta ei suppene A:ssa.

p3. Tarkista kirjan esimerkin havainnot: Jono $(x_n) = (2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots)$ ei suppene, mutta sillä on kasautumisarvo 0. Anna esimerkki osajonosta (x_{n_k}), joka suppenee. (*Vinkki:* Harjoituksesta saa suuremman hyödyn, kun perustelee vastaukset määritelmiä käyttäen.)

p4. Tarkasta yksityiskohdat seuraavasta luentojen esimerkistä: Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus $x \mapsto \max\{x, n\}$. Tällöin jono (f_n) suppenee pisteittäin identtiseen kuvaukseen $x \mapsto x$, mutta suppeneminen ei ole tasaista.

p5. Olkoon $f \colon (X, d) \to (Y, d')$ kuvaus. Oletetaan, että osajoukko $A \subset X$ ja piste $y_0 \in Y$ ovat sellaisia, että $f(A) = \{y_0\}$. Osoita, että $\lim_{x \to x_0, x \in A} f(x) = y_0$, kun $x_0 \in \overline{A}$.

p6. Olkoon $f \colon (X, d) \to (Y, d')$ kuvaus ja $a \in X$. Tarkista määritelmiä käyttäen Väisälän kirjan lauseen 11.28 väittämä, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(a) f on jatkuva a:ssa,

(b) $f(a) = \lim_{x \to a, x \in X} f(x)$,

(c) raja-arvo $\lim_{x \to a, x \in X} f(x)$ on olemassa.

p7. Mitä tapahtuu, jos edellisen preppaustehtävän raja-arvoissa ehto $x \in X$ vaihdetaan ehtoon $x \in X \setminus \{a\}$?

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 46 (eli 14.11–20.11.).

t1. *Todista raja-arvon määritelmää ja kolmioepäyhtälöä käyttäen:* Olkoon $(V, ||\cdot||)$ normiavaruus.

(a) Osoita, että jos (x_k) ja (y_k) sellaisia jonoja V:ssä, että $x_k \to x$ ja $y_k \to y$, niin tällöin $x_k + y_k \to x + y$.

(b) Osoita, että jos (a_k) on sellainen reaalilukujono, että $a_k \to a$, ja että (x_k) on sellainen jono V:ssä, että $x_k \to x$, niin $a_k x_k \to ax$. [1]

[1] Tulos on Väisälän kirjassa todistettu ja tämän tehtävän tarkoituksena on antaa toinen todistus.

t2. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ kuvaus $x \mapsto \frac{x}{||x||_\infty}$. Merkitään myös

$$L_{x_0} = \{tx_0 \in \mathbb{R}^3 \colon t > 0\}$$

jokaisella $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(a) Osoita, että raja-arvo $\lim_{x\to 0, x\in L_{x_0}} f(x)$ on olemassa jokaisella $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(b) Osoita, että raja-arvoa $\lim_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa.

t3. Olkoon $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ kuvaus, $A \subset X$ osajoukko ja $x_0 \in \overline{A}$. Oletetaan, että $y_0 = \lim_{x\to x_0, x\in A} f(x)$ on olemassa. Osoita, että $y_0 \in \overline{fA}$.

t4. Palautetaan mieleen, että $C([0,1])$ on jatkuvien funktioiden $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ avaruus ja että funktio $||\cdot||_1 \colon C([0,1]) \to [0,\infty[$, $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$, on normi vektoriavaruudessa $C([0,1])$.

Tarkastellaan jonoja (f_n) normiavaruudessa $(C([0,1]), ||\cdot||_1)$.

(a) Anna esimerkki sellaisesta jonosta (f_n), että $||f_n||_1 \to 0$, mutta joka ei suppene pisteittäin kohti mitään välillä $[0,1]$ määriteltyä reaaliarvoista funktiota. (*Vinkki:* Anna ensin esimerkki sellaisesta jonosta (f_n), että $(f_n(x))$ ei suppene nollaa, jossain pisteessä x. Tarkastele tämän jälkeen yleisempää tilannetta.)

(b) Anna esimerkki sellaisesta jonosta (f_n), joka suppenee pisteittäin kohti jotakin funktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $||f_n||_1 \to 0$, mutta joka ei suppene tasaisesti kohti funktiota f.

t5. Olkoon (x_k) sellainen metrisen avaruuden (X,d) jono, että sen jokaisella osajonolla on suppeneva osajono, joka suppenee kohti pistettä $x \in X$. Osoita, että $x_k \to x$. (*Vinkki:* Vastaoletus.)