HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 1 – Ratkaisuehdotuksia

t1. Olkoot $(V, ||\cdot||_V)$ ja $(W, ||\cdot||_W)$ normiavaruuksia, ja oletetaan tunnetuksi, että vektoriavaruuksien V ja W tuloavaruus $V \times W$ on vektoriavaruus, kun se varustetaan laskutoimituksilla $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$ ja $a(v, w) = (av, aw)$, missä $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$.

Määritellään funktiot $||\cdot||_0 \colon V \times W \to [0, \infty[$, $||\cdot||_1 \colon V \times W \to [0, \infty[$ ja $||\cdot||_2 \colon V \times W \to [0, \infty[$ kaavoilla $||(v, w)||_0 = \max\{||v||_V, ||w||_W\}$, $||(v, w)||_1 = ||v||_V + ||w||_W$ ja $||(v, w)||_2 = \sqrt{||v||_V^2 + ||w||_W^2}$, missä $v \in V$ ja $w \in W$.

Osoita, että $||\cdot||_0$, $||\cdot||_1$ ja $||\cdot||_2$ ovat vektoriavaruuden $V \times W$ normeja.

Ratkaisu:

- Tapaus $||\cdot||_0$:

(N1) Olkoot $(v, w), (v', w') \in V \times W$. Tällöin

$$||v + v'||_V \leq ||v||_V + ||v'||_V \leq ||(v, w)||_0 + ||(v', w')||_0.$$

Vastaavasti $||w + w'||_W \leq ||(v, w)||_0 + ||(v', w')||_0$. Näin ollen

$$\begin{aligned} ||(v, w) + (v', w')||_0 &= ||(v + v', w + w')||_0 = \max\{||v + v'||_V, ||w + w'||_W\} \\ &\leq ||(v, w)||_0 + ||(v', w')||_0. \end{aligned}$$

(N2) Olkoot $(v, w) \in V \times W$ ja $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} ||a(v, w)||_0 &= ||(av, aw)||_0 = \max\{||av||_V, ||aw||_W\} \\ &= \max\{|a|||v||_V, |a|||w||_W\} = |a|||(v, w)||_0. \end{aligned}$$

(N3) Selvä.

- Tapaus $||\cdot||_1$:

(N1) Olkoot $(v, w), (v', w') \in V \times W$. Tällöin

$$\begin{aligned} ||(v, w) + (v', w')||_1 &= ||(v + v', w + w')||_1 = ||v + v'||_V + ||w + w'||_W \\ &\leq ||v||_V + ||v'||_V + ||w||_W + ||w'||_W = ||(v, w)||_1 + ||(v', w')||_1. \end{aligned}$$

(N2) Olkoot $(v, w) \in V \times W$ ja $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$||a(v, w)||_1 = ||(av, aw)||_1 = ||av||_V + ||aw||_W = |a|||v||_V + |a|||w||_W = |a|||(v, w)||_1.$$

(N3) Selvä.

- Tapaus $||\cdot||_2$:

(N1) Olkoot $(v, w), (v', w') \in V \times W$ ja merkitään $x = (||v||_V, ||w||_W) \in \mathbb{R}^2$ ja $y = (||v'||_V, ||w'||_W) \in \mathbb{R}^2$. Merkitään $|x + y|_2$ vektorin $x + y \in \mathbb{R}^2$ euklidista pituutta. Tällöin

$$|x|_2 = \sqrt{||v||_V^2 + ||w||_W^2} = ||(v, w)||_2,$$

$$|y|_2 = \sqrt{||v'||_V^2 + ||w'||_W^2} = ||(v', w')||_2$$

ja

$$\begin{aligned} |x+y|_2^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y \\ &= ||v||_V^2 + ||w||_W^2 + 2\left(||v||_V||v'||_V + ||w||_W||w'||_W\right) + ||v'||_V^2 + ||w'||_W^2 \\ &= \left(||v||_V + ||v'||_V\right)^2 + \left(||w||_W + ||w'||_W\right)^2. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} ||(v,w)+(v',w')||_2 &= \sqrt{||v+v'||_V^2 + ||w+w'||_W^2} \\ &\le \sqrt{\left(||v||_V + ||v'||_V\right)^2 + \left(||w||_W + ||w'||_W\right)^2} \\ &= |x+y|_2 \le |x|_2 + |y|_2 = ||(v,w)||_2 + ||(v',w')||_2. \end{aligned}$$

(N2) Selvä.

(N3) Selvä.

t2. Olkoot $(V, ||\cdot||_V)$ ja $(W, ||\cdot||_W)$ normiavaruuksia. Osoita, että tehtävässä **t1.** annetut vektoriavaruuden $V\times W$ normit $||\cdot||_0$, $||\cdot||_1$ ja $||\cdot||_2$ ovat bilipschitz-ekvivalentteja keskenään. (*Huom:* Katso preppaustehtävä **p2.**.)

Ratkaisu: Osoitetaan, että kaikille alkioille $(v,w)\in V\times W$ pätee

$$\|(v,w)\|_0 \le \|(v,w)\|_2 \le \|(v,w)\|_1 \le 2\|(v,w)\|_0.$$

Tämä ratkaisee tehtävän, sillä tällöin sekä $\|\cdot\|_2$ että $\|\cdot\|_1$ ovat molemmat bilipschitz-ekvivalentteja normin $\|\cdot\|_0$ kanssa bilipschitz-vakiolla $M=2$. Huomaa, että tässä alaraja seuraa siitä, että luonnollisesti $(1/2)\|(v,w)\|_0 \le \|(v,w)\|_0$ kaikilla $(v,w)\in V\times W$.

Olkoon $(v,w)\in V\times W$. Jos $\|v\|_V \ge \|w\|_W$, saadaan

$$\|(v,w)\|_0 = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\} = \|v\|_V = \sqrt{\|v\|_V^2} \le \sqrt{\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2} = \|(v,w)\|_2.$$

Jos taas $\|v\|_V < \|w\|_W$, saadaan samoin

$$\|(v,w)\|_0 = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\} = \|w\|_W = \sqrt{\|w\|_W^2} \le \sqrt{\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2} = \|(v,w)\|_2.$$

Tämä osoittaa epäyhtälöketjun ensimmäisen epäyhtälön $\|(v,w)\|_0 \le \|(v,w)\|_2$.

Huomaa, että vektoriavaruuden $V\times W$ yhteenlaskua käyttäen $(v,w)=(v,0)+(0,w)$, missä nollat ovat avaruuksien V ja W nolla-alkioita. Koska nolla-alkioiden normi on nolla, ketjun toinen epäyhtälö seuraa laskutoimituksesta

$$\begin{aligned} \|(v,w)\|_2 &= \|(v,0)+(0,w)\|_2 \\ &\le \|(v,0)\|_2 + \|(0,w)\|_2 \\ &= \sqrt{\|v\|_V^2 + 0^2} + \sqrt{0^2 + \|w\|_W^2} \\ &= \|v\|_V + \|w\|_W \\ &= \|(v,w)\|_1. \end{aligned}$$

Viimeistä epäyhtälöä varten jakaudutaan taas tapauksiin sen perusteella, kumman alkioista v ja w normi on suurempi. Jos $\|v\|_V \ge \|w\|_W$, laskutoimitus antaa

$$\|(v,w)\|_1 = \|v\|_V + \|w\|_W \le \|v\|_V + \|v\|_V = 2\|v\|_V = 2\|(v,w)\|_0.$$

Toinen tapaus $\|v\|_V < \|w\|_W$ seuraa samoin laskutoimituksesta

$$\|(v,w)\|_1 = \|v\|_V + \|w\|_W < \|w\|_W + \|w\|_W = 2\|w\|_W = 2\|(v,w)\|_0.$$

t3. Osoita, että vektoriavaruuden V normit $||\cdot||$ ja $|||\cdot|||$ ovat bilipschitz-ekvivalentit (katso **p2.**), jos ja vain jos identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon V \to V$ on bilipschitz-kuvaus normiavaruudesta $(V, ||\cdot||)$ normiavaruuteen $(V, |||\cdot|||)$. (*Huom:* Normiavaruudessa käytetään aina normin antamaa metriikkaa ellei toisin mainita.)

Ratkaisu: Oletetaan, että normit $||\cdot||$ ja $|||\cdot|||$ ovat bilipschitz-ekvivalentit. Tällöin on olemassa sellainen Lipschitz-vakio $M > 0$, että kaikilla $v \in V$ pätee

$$\frac{1}{M}||v|| \leq |||v||| \leq M||v||.$$

Tällöin myös kaikille pisteille $v, w \in V$ pätee

$$\frac{1}{M}||v-w|| \leq |||v-w||| = |||id(v) - id(w)||| \leq M||v-w||,$$

siis identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon V \to V$ on bilipschitz $(V, ||\cdot||)$ normiavaruuteen $(V, |||\cdot|||)$. Oletetaan sitten, että $\mathrm{id}\colon V \to V$ on bilipschitz. Tällöin edellinen yhtälö pätee kaikille $v, w \in V$. Siis erityisesti kun asetetaan $w = \overline{0}$, niin

$$\frac{1}{M}||v-\overline{0}|| = \frac{1}{M}||v|| \leq |||v-\overline{0}||| = |||v||| \leq M||v-\overline{0}|| = M||v||.$$

t4. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja olkoon e_0 tuloavaruuden $X \times Y$ metriikka $e_0((x,y),(x',y')) = \max\{d(x,x'), d'(y,y')\}$.

(a) Olkoot $U \subset X$ ja $V \subset Y$ avoimia joukkoja. Osoita, että $U \times V$ on avoin $(X \times Y, e_0)$:ssa.

(b) Olkoot $E \subset X$ ja $F \subset Y$ suljettuja joukkoja. Osoita, että $E \times F$ on suljettu $(X \times Y, e_0)$:ssa.

(c) Olkoon e_2 metriikka $e_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d(x,x')^2 + d'(y,y')^2}$ $X \times Y$:ssä. Osoita, että joukko $U \times V$ on avoin ja että joukko $E \times F$ on suljettu $(X \times Y, e_2)$:ssa.

Ratkaisu:

(a) Koska $U \subset X$ ja $V \subset Y$ ovat avoimia joukkoja, jokaiselle $z_x \in U$ ja $z_y \in V$ on olemassa $r_x, r_y > 0$ siten että kuula $B_d(z_x, r_x)$ kuuluu joukkoon U ja kuula $B_{d'}(z_y, r_y)$ kuuluu joukkoon V. Osoitetaan nyt, että jokaiselle tuloavaruuden pisteelle $z = (z_x, z_y) \in U \times V$ löytyy sellainen $r > 0$ että kuula $B_{d_0}(z, r)$ kuuluu joukkoon $U \times V$.

Olkoon $r = \min\{r_x, r_y\}$. Tarkastellaan mielivaltaista pistettä $a = (a_x, a_y)$ kuulassa $B_{d_0}(z, r)$: nyt siis $e_0(z, a) < r$ eli määritelmän nojalla

$$\max\{d(z_x, a_x), d'(z_y, a_y)\} < r \implies \begin{cases} d(z_x, a_x) < r \leq r_x \\ d'(z_y, a_y) < r \leq r_y \end{cases}$$

jolloin $a_x \in B_d(z_x, r_x)$ ja $a_y \in B_{d'}(z_y, r_y)$, mistä oletuksen nojalla seuraa että $a \in U \times V$. Siispä kuula $B_{e_0}(z, r)$ kuuluu joukkoon $U \times V$, joten $U \times V$ on avoin.

(b) Joukko $E \times F$ on suljettu jos sen komplementti on avoin. Nyt tuloavaruuden piste $z = (z_x, z_y)$ kuuluu komplementtiin mikäli $z_x \in \complement E$ tai $z_y \in \complement F$, siis

$$\complement(E \times F) = \left(\complement E \times Y\right) \cup \left(X \times \complement F\right).$$

Joukkojen E ja F komplementit ovat avoimet (kuten ovat avaruudet X ja Y), joten a-kohdan nojalla joukko $\complement(E \times F)$ on avoin, ja tällöin joukko $E \times F$ on suljettu.

(c) Lauseen 10.9 (s. 73) nojalla metriikat e_2 ja e_0 ovat bilipschitz-ekvivalentit, ja toisaalta lauseen 10.4 (s. 71) nojalla bilipschitz-ekvivalentit metriikat ovat myös topologisesti ekvivalentit. Siispä $U \times V$ on avoin ja $E \times F$ suljettu myös avaruudessa $(X \times Y, e_2)$.

t5. Olkoon $f\colon X \to Y$ homeomorfismi avaruudesta (X, d) avaruuteen (Y, d') ja olkoon $d_f\colon X \times X \to [0, \infty[$ funktio $d_f(x, y) = d'(f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$.

(a) Osoita, että d_f on metriikka X:ssä.

(b) Osoita, että d_f on ekvivalentti metriikan d kanssa.

Ratkaisu:

(a) f on homeomorfismi, ja siis erityisesti injektio. Tarkistetaan, että metriikan aksioomat pätevät kuvaukselle d_f. Olkoon siis $x, y, z \in X$.

(M1):

$$\begin{aligned} d_f(x,z) = d'(f(x), f(z)) &\underset{(M1)}{\leq} d'(f(x), f(y)) + d'(f(y), f(z)) \\ &= d_f(x,y) + d_f(y,z). \end{aligned}$$

(M2): $d_f(x,y) = d'(f(x), f(y)) \underset{(M2)}{=} d'(f(y), f(x)) = d_f(y,x)$.

(M3): $d_f(x,y) = 0 \iff d'(f(x), f(y)) = 0 \underset{(M3)}{\iff} f(x) = f(y) \underset{f \text{ on injektio}}{\iff} x = y$

Siis d_f on avaruuden X metriikka. (Ainoa asia mitä tässä tarvittiin oli kuvauksen f injektiivisyys, ks. Topo IA Harjoitus 1 t4.)

(b) Nyt kuvaus $f^{-1}\colon Y \to X$ on hyvin määritelty, sillä f on homeomorfismina bijektio, jolloin käänteiskuvaus f^{-1} on siis olemassa. Lisäksi f^{-1} on bijektio. Nyt jos $y_1, y_2 \in Y$, niin

$$d_f(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = d'(f(f^{-1}(y_1)), f(f^{-1}(y_2))) = d'(y_1, y_2),$$

joten f^{-1} on itseasiassa bijektiivinen isometria avaruudelta (Y, d') avaruudelle (X, d_f), ja siis erityisesti homeomorfismi (Väisälä, lause 9.19). Täten yhdistetty kuvaus $f^{-1} \circ f\colon (X, d) \to (X, d_f)$ on homeomorfismi kahden homeomorfismin yhdisteenä. Toisaalta nyt $(f^{-1} \circ f)(x) = x = id(x)$ kaikilla $x \in X$, joten identiteettikuvaus $id\colon (X, d) \to (X, d_f)$ on homeomorfismi. Väisälän kirjan lauseen 10.2. nojalla metriikat d ja d_f ovat siis ekvivalentit.

t6. Olkoon $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funktio $x \mapsto ||x||_1/||x||_\infty$ ja olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kuvaus

$$x \mapsto \begin{cases} g(x)x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Osoita, että $d_\infty(0, f(x)) = d_1(0, x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.[1]

(b) Osoita, että normit $||\cdot||_1\colon (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ja $||\cdot||_\infty\colon (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ovat jatkuvia funktioita.[2]

(c) Osoita, että funktio $g\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ on jatkuva.

(d) Osoita, että $f\colon (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$ on jatkuva.

(e) Osoita, että $f\colon (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$ on homeomorfismi.

[1] Tässä d_∞ ja d_1 ovat tutut normien $||\cdot||_\infty$ ja $||\cdot||_1$ antamat metriikat.

[2] Tässä siis d_2 on tuttu euklidinen metriikka.

Ratkaisu:

(a) Jokaisella $x \neq 0$ pätee

$$d_\infty(0, f(x)) = ||f(x)||_\infty = \Big|\Big|\frac{||x||_1}{||x||_\infty}x\Big|\Big|_\infty = \frac{||x||_1}{||x||_\infty}||x||_\infty = ||x||_1 = d_1(0, x).$$

(b) Koska jokaisella $j = 1, \ldots, n$, projektio $\mathrm{pr}_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ on jatkuva, niin myös niiden summa eli funktio $||\cdot||_1$ on jatkuva. Koska $\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \max\{\max\{|x_1|, \ldots, |x_{n-1}|\}, |x_n|\}$, niin induktiolla voidaan osoittaa, että $||\cdot||_\infty$ on jatkuva.

(c) Merkitään $\varphi \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ||x||_1$, ja $\psi \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = ||x||_\infty$. Nyt φ ja ψ ovat jatkuvia funktioita metrisestä avaruudesta $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d_2)$ euklidiselle reaaliakselille. Koska $\psi(x) = \varphi(x)/\psi(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, niin g on hyvin määritelty ja jatkuva.

(d) Edellisen kohdan perusteella rajoittuma $g = f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d_2) \to (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d_2)$ on jatkuva. Koska $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on avoin, niin kuvaus $f \colon (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$ on siis jatkuva jokaisessa joukon $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pisteessä. Tämän voi perustella seuraavasti. Merkitään $A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Olkoon $x \in A$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $\delta' > 0$, että $gB_{d_A}(x, \delta') \subset B_{d_A}(g(x), \varepsilon)$. Valitaan nyt $\delta = \min\{||x||_2, \delta\}$. Nyt $B_{d_A}(x, \delta) = B_{d_2}(x, \delta)$. Koska $g(x) = f(x)$, niin $fB_{d_2}(x, \delta) \subset B_{d_2}(f(x), \varepsilon)$.

Jäljellä on siis osoittaa, että f on jatkuva origossa. Ensimmäisen kohdan perusteella $fB_{d_1}(0, r) = B_{d_\infty}(0, r)$ kaikilla $r > 0$. Koska $B_{d_2}(0, r) \subset B_{d_1}(0, nr)$ ja $B_{d_\infty}(0, r) \subset B_{d_2}(0, r)$ kaikilla $r > 0$ (katso kaava (10.a) Väisälän kirjassa), niin $fB_{d_2}(0, r/n) \subset fB_{d_1}(0, r) \subset B_{d_\infty}(0, r) \subset B_{d_2}(0, r)$ kaikilla $r > 0$. Kuvaus f on siis jatkuva origossa.

(e) Havaitaan ensin, että f on bijektio. Olkoon $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kuvaus

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{||x||_\infty}{||x||_1}x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Selvästi $f(h(0)) = 0$. Toisaalta, kaikilla $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(h(x)) &= f\left(\frac{||x||_\infty}{||x||_1}x\right) = \frac{\Big|\Big|\frac{||x||_\infty}{||x||_1}x\Big|\Big|_1}{\Big|\Big|\frac{||x||_\infty}{||x||_1}x\Big|\Big|_\infty}\frac{||x||_\infty}{||x||_1}x \\ &= \frac{\frac{||x||_\infty}{||x||_1}||x||_1}{\frac{||x||_\infty}{||x||_1}||x||_\infty}\frac{||x||_\infty}{||x||_1}x = x. \end{aligned}$$

Vastaavasti $h(f(x)) = x$. Näin ollen h on kuvauksen f käänteiskuvaus.

Koska kuvaus h on jatkuva samalla perustelulla kuin kuvaus f, niin f on homeomorfismi.