HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1b, syksy 2016
Harjoitus 1

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

p1. Tarkista, että joukon X metriikat d ja d' ovat ekvivalentit jos ja vain jos identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon (X,d) \to (X,d')$ on homeomorfismi.

p2. Olkoon V vektoriavaruus. Määritellään, että normit $||\cdot||\colon V \to [0,\infty[$ ja $|||\cdot|||\colon V \to [0,\infty[$ ovat *bilipschitz-ekvivalentit*, jos on olemassa sellainen $M \geq 1$, että

$$||v||/M \leq |||v||| \leq M||v||$$

kaikilla vektoreilla $v \in V$.

Tarkista, että normit $||\cdot||$ ja $|||\cdot|||$ ovat bilipschitz-ekvivalentit, jos ja vain jos niiden määräämät metriikat ovat bilipschitz-ekvivalentit.

p3. Tarkista, että joukon X metriikat d ja d' ovat bilipschitz-ekvivalentit, jos ja vain jos identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon (X,d) \to (X,d')$ on bijektiivinen bilipschitz-kuvaus.

p4. Olkoon X joukko ja olkoot d ja d' sellaisia metriikoita, että metrisen avaruuden (X,d) läpimitta on ääretön ja metrisen avaruuden (X,d') läpimitta on äärellinen. Perustele, että ei ole olemassa bilipschitz-kuvausta $f\colon X \to X$ metrisestä avaruudesta (X,d) metriseen avaruuteen (X,d').

p5. Varmista, että osaat todistaa seuraavan Väisälän kirjan homeomorfismeista: $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ on homeomorfismi, jos ja vain f on jatkuva bijektio, jolle pätee, että $f(U) \subset Y$ on d'-avoin kaikilla $U \subset X$ d-avoin.

p6. Olkoon $f\colon]0,1[\to]1,\infty[$ kuvaus $x \mapsto 1/x$ sekä $g\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$, $g(x) = e^x$. Osoita näitä kuvauksia hyödyntäen, että reaaliakselin $\mathbb{R}$ joukot $]0,1[$, $]0,\infty[$ ja itse $\mathbb{R}$ ovat keskenään homeomorfisia.

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 45 (eli 7.11-13.11.).

t1. Olkoot $(V, ||\cdot||_V)$ ja $(W, ||\cdot||_W)$ normiavaruuksia, ja oletetaan tunnetuksi, että vektoriavaruuksien V ja W tuloavaruus $V \times W$ on vektoriavaruus, kun se varustetaan laskutoimituksilla $(v,w) + (v',w') = (v+v', w+w')$ ja $a(v,w) = (av, aw)$, missä $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$.

Määritellään funktiot $||\cdot||_0\colon V \times W \to [0,\infty[$, $||\cdot||_1\colon V \times W \to [0,\infty[$ ja $||\cdot||_2\colon V \times W \to [0,\infty[$ kaavoilla $||(v,w)||_0 = \max\{||v||_V, ||w||_W\}$, $||(v,w)||_1 = ||v||_V + ||w||_W$ ja $||(v,w)||_2 = \sqrt{||v||_V^2 + ||w||_W^2}$, missä $v \in V$ ja $w \in W$.

Osoita, että $||\cdot||_0$, $||\cdot||_1$ ja $||\cdot||_2$ ovat vektoriavaruuden $V \times W$ normeja.

t2. Olkoot $(V, ||\cdot||_V)$ ja $(W, ||\cdot||_W)$ normiavaruuksia. Osoita, että tehtävässä **t1.** annetut vektoriavaruuden $V \times W$ normit $||\cdot||_0$, $||\cdot||_1$ ja $||\cdot||_2$ ovat bilipschitz-ekvivalentteja keskenään. (*Huom:* Katso preppaustehtävä **p2.**.)

t3. Osoita, että vektoriavaruuden V normit $||\cdot||$ ja $|||\cdot|||$ ovat bilipschitz-ekvivalentit (katso **p2.**), jos ja vain jos identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon V \to V$ on bilipschitz-kuvaus normiavaruudesta $(V, ||\cdot||)$ normiavaruuteen $(V, |||\cdot|||)$. (*Huom:* Normiavaruudessa käytetään aina normin antamaa metriikkaa ellei toisin mainita.)

t4. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja olkoon e_0 tuloavaruuden $X \times Y$ metriikka $e_0((x,y),(x',y')) = \max\{d(x,x'), d'(y,y')\}$.

(a) Olkoot $U \subset X$ ja $V \subset Y$ avoimia joukkoja. Osoita, että $U \times V$ on avoin $(X \times Y, e_0)$:ssa.

(b) Olkoot $E \subset X$ ja $F \subset Y$ suljettuja joukkoja. Osoita, että $E \times F$ on suljettu $(X \times Y, e_0)$:ssa.

(c) Olkoon e_2 metriikka $e_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d(x,x')^2 + d'(y,y')^2}$ $X \times Y$:ssä. Osoita, että joukko $U \times V$ on avoin ja että joukko $E \times F$ on suljettu $(X \times Y, e_2)$:ssa.

t5. Olkoon $f\colon X \to Y$ homeomorfismi avaruudesta (X, d) avaruuteen (Y, d') ja olkoon $d_f\colon X \times X \to [0, \infty[$ funktio $d_f(x,y) = d'(f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$.

(a) Osoita, että d_f on metriikka X:ssä.

(b) Osoita, että d_f on ekvivalentti metriikan d kanssa.

t6. Olkoon $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funktio $x \mapsto ||x||_1/||x||_\infty$ ja olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kuvaus

$$x \mapsto \begin{cases} g(x)x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Osoita, että $d_\infty(0, f(x)) = d_1(0, x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.[1]

(b) Osoita, että normit $||\cdot||_1\colon (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ja $||\cdot||_\infty\colon (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ovat jatkuvia funktioita.[2]

(c) Osoita, että funktio $g\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ on jatkuva.

(d) Osoita, että $f\colon (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$ on jatkuva.

(e) Osoita, että $f\colon (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$ on homeomorfismi.

[1] Tässä d_∞ ja d_1 ovat tutut normien $||\cdot||_\infty$ ja $||\cdot||_1$ antamat metriikat.

[2] Tässä siis d_2 on tuttu euklidinen metriikka.