HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia Ia, syksy 2016
Tentti 2.11.

t1. Olkoon $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to [0,\infty[$ funktio $d(x,y) = ||x|-|y||$ kaikilla $x,y\in\mathbb{R}$.

(a) (3p.) Osoita, että d toteuttaa kolmioepäyhtälön.

(b) (3p.) Osoita, että d ei ole metriikka joukossa $\mathbb{R}$.

Ratkaisu: Olkoot $x,y,z\in\mathbb{R}$. Tällöin

$$d(x,y) = ||x|-|y|| = ||x|-|z|+|z|-|y|| \leq ||x|-|z||+||z|-|y|| = d(x,z)+d(z,y).$$

eli d toteuttaa kolmioepäyhtälön. Funktio d ei kuitenkaan ole metriikka, sillä $d(-1,1) = ||-1|-|1|| = |1-1| = 0$, vaikka $-1\neq 1$.

t2. Olkoot (X,d_X), (Y,d_Y) ja (Z,d_Z) metrisiä avaruuksia.

(a) (2p.) Anna määritelmä kuvauksen $f\colon X\to Y$ jatkuvuudelle pisteessä $x\in X$ metrisestä avaruudesta (X,d_X) metriseen avaruuteen (Y,d_Y).

(b) (4p.) Olkoot $f\colon X\to Y$ ja $g\colon Y\to Z$ jatkuvia kuvauksia. Osoita, että kuvaus $g\circ f\colon X\to Z$ on jatkuva.

Ratkaisu:

(a) Kuvaus f on jatkuva pisteessä $x\in X$, jos jokaisella $\varepsilon>0$ on olemassa selainen $\delta>0$, että $fB_d(x,\delta)\subset B_d(f(x),\varepsilon)$.

(b) Olkoon $x\in X$ ja $\varepsilon>0$. Koska kuvaus g on jatkuva pisteessä $f(x)$, niin on olemassa $\delta'>0$, jolle pätee $gB_{d_Y}(f(x),\delta')\subset B_{d_Z}(g(f(x)),\varepsilon)$. Toisaalta, koska f on jatkuva pisteessä $x\in X$, niin on olemassa $\delta>0$, jolle pätee $fB_{d_X}(x,\delta)\subset B_{d_Y}(f(x),\delta')$. Näin ollen $g(f(B_{d_X}(x,\delta))\subset g(B_{d_Y}(f(x),\delta')\subset B_{d_Z}(g(f(x)),\varepsilon)$. Kuvaus $g\circ f$ on siis jatkuva pisteessä $x\in X$. Näin ollen $g\circ f$ on jatkuva.

t3. Olkoot

$$X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x>0,\ y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$$

ja

$$A = \{(x,y)\in X\colon y\geq 0\}\subset\mathbb{R}^2.$$

(a) (4p.) Osoita, että A on suljettu joukko metrisessä avaruudessa (X,d), missä d tason $\mathbb{R}^2$ euklidisen metriikan rajoittuma joukkoon X.

(b) (2p.) Osoita, että A ei ole euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ suljettu osajoukko.

Ratkaisu:

(a) Osoitetaan, että A:n komplementti X:ssä on avoin. Huomataan aluksi, että $X\setminus A =]0,\infty[\times]-\infty,0[= X\cap(\mathbb{R}\times]-\infty,0[)$.
Olkoon $(x,y)\in X\setminus A$. Tällöin $y<0$ ja euklidinen kuula $B^2((x,y),|y|)$ sisältyy alempaan puolitasoon eli joukkoon $\mathbb{R}\times]-\infty,0[$. Näin ollen $B_d((x,y),|y|)\subset X\cap(\mathbb{R}\times]-\infty,0[) = X\setminus A$. Joukko $X\setminus A$ on siis avoin X:ssä, joten A on suljettu X:ssä.

(b) Havaitaan aluksi, että $d((0,0),A)=0$, sillä jokaisella $r>0$ pätee $d((0,0),A)\leq d((0,0),(r,0)) = r$. Näin ollen $(0,0)\in\overline{A}$. Koska $(0,0)\notin A$, niin A ei ole suljettu $\mathbb{R}^2$:ssa.

t4. (6p.) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ epätyhjä osajoukko. Osoita, että $d(x, A) = d(x, \overline{A})$ jokaisella $x \in X$.
Ratkaisu: Olkoon $x \in X$. Koska $A \subset \overline{A}$, niin

$$d(x, \overline{A}) = \inf_{y \in \overline{A}} d(x, y) \leq \inf_{y \in A} d(x, y) = d(x, A).$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Infimumin määritelmän perusteella on olemassa sellainen $y' \in \overline{A}$, että $d(x, y') < d(x, \overline{A}) + \varepsilon/2$. Koska $y' \in \overline{A}$, niin $B_d(y', \varepsilon/2) \cap A \neq \emptyset$. Näin ollen on olemassa $y \in A$, jolle pätee $d(y', y) < \varepsilon/2$. Nyt kolmioepäyhtälön perusteella

$$d(x, A) \leq d(x, y) \leq d(x, y') + d(y', y) \leq d(x, \overline{A}) + \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$. Näin ollen $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

Seuraavassa tehtävässä sanotaan, että joukko $W \subset V$ on vektoriavaruuden V *vektorialiavaruus*, jos $x + y \in W$ ja $ax \in W$ kaikilla $x, y \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$.

t5. (6p.) Olkoon $(V, ||\cdot||)$ normiavaruus ja $W \subset V$ sellainen vektoriavaruuden V vektorialiavaruus, joka on myös avoin joukko metrisessä avaruudessa (V, d), missä d on normiin $||\cdot||$ liittyvä metriikka $d(x, y) = ||x - y||$ kaikilla $x, y \in V$. Osoita, että $W = V$.
Ratkaisu: Koska $\underline{0} \in W$ ja W on avoin, niin on olemassa $r > 0$, jolle pätee $B_d(\underline{0}, r) \subset W$. Olkoon $x \in V$. Osoitetaan, että $x \in W$. Olkoon $x' = (r/2)x/||x||$. Tällöin

$$d(x', \underline{0}) = ||x'|| = \frac{r}{2}\frac{1}{||x||}||x|| = \frac{r}{2} < r$$

eli $x' \in B_d(\underline{0}, r) \subset W$. Koska $||x||\frac{2}{r}x' \in W$, niin $x \in W$. Näin ollen $V = W$.