

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1a, syksy 2016
Harjoitus 6

Huom. Näissä tehtävissä avaruuksissa \mathbb{R}^n käytetään euklidista metriikkaa d_E ellei toisin mainita. Kuulia $B_{d_E}(x, r)$ ja $\bar{B}_{d_E}(x, r)$ merkitään näissä tapauksissa lyhyesti merkkinnöillä $B^n(x, r)$ ja $\bar{B}^n(x, r)$ kuten Väisälän kirjassa.

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

- p1.** Varmista, että tiedät miksi joukko $[0, 1[$ on avoin joukko reaaliakselin \mathbb{R} välillä $[0, \infty[$.
- p2.** Varmista, että osaat osoittaa joukon $]0, 1] \times]0, 1]$ suljetuksi eukliidisen tason \mathbb{R}^2 joukossa $]0, \infty[\times]0, \infty[$.
- p3.** Varmista, että osaat todistaa jatkuvuuden määritelmää käyttäen, että metrisestä avaruudesta (X, d) metriiseen avaruuteen (Y, d') määritellyn jatkuvan kuvauksen $f: X \rightarrow Y$ rajoittuma joukkoon $A \subset X$, eli kuvaus $f|_A: A \rightarrow Y$, on jatkuva.
- p4.** Varmista, että osaat osoittaa, että diskreetin metrisen avaruuden (X, d) jokainen osajoukko A on diskreetti.
- p5.** Varmista, että tiedät, miksi kuvausten $f|_{\{x\}}: \{x\} \rightarrow Y$ jatkuvuus jokaisella $x \in X$ ei tarkoita, että kuvaus $f: X \rightarrow Y$ olisi jatkuva metrisestä avaruudesta (X, d) metriseen avaruuteen (Y, d') .

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 42 (eli 17.-21.10.).

- t1.** (a) Onko euklidisen avaruuden \mathbb{R}^3 joukko $A = \{(x, y, z) \in \bar{B}^3(0, 1) : xy > 0\}$ avoin suljetussa kuulassa $\bar{B}^3(0, 1)$?
- (b) Entä onko joukko $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in B^n(0, 1) : |x_1 x_2 \cdots x_n| \geq 1/2\}$ suljettu avoimessa kuulassa $B^n(0, 1)$?
- t2.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$ suljettu joukko ja $U \subset \mathbb{R}^3$ avoin joukko.
- (a) Onko joukko $U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$ avoin?
- (b) Onko joukko $A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$ suljettu?
- t3.** Tarkastellaan metristä avaruutta $(C([0, 1]), d_1)$, missä $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$. Olkoon $E = \{f \in C([0, 1]) : f(1/2) \geq 0\}$. Anna esimerkki avoimesta joukosta $U \subset E$ joukossa E , joka ei ole avoin avaruudessa $(C([0, 1]), d_1)$. (*Vinkki:* Palauta mieleen, mitkä joukot tiedät aina avoimiksi.)
- t4.** Anna esimerkki funktiosta $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, jolla on seuraava ominaisuus: on olemassa sellainen joukko $A \subset \mathbb{R}^2$, että
- $f|_A: A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva funktio A :ssa,
 - $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus A}: \mathbb{R}^2 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva funktio $\mathbb{R}^2 \setminus A$:ssa, ja
 - funktio $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ei ole jatkuva missään pisteessä $x \in \mathbb{R}^2$.
- t5.** Anna esimerkki sellaisista joukoista $A, B, V \subset \mathbb{R}$, että $\mathbb{R} = A \cup B$, $V \cap A$ on avoin A :ssa, $V \cap B$ on avoin B :ssä ja V ei ole avoin \mathbb{R} :ssä.