HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1a, syksy 2016
Harjoitus 5

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

p1. Varmistu, että osaat osoittaa, että välit $[a,b]$, $[a,\infty[$, ja $]-\infty,b]$ ovat reaaliakselin $\mathbb{R}$ suljettuja joukkoja. (*Huom:* Muista, että avaruuksissa $\mathbb{R}^n$ ja siis erityisesti reaaliakselilla käytetään euklidista metriikkaa ellei toisin mainita.)

p2. Varmistu, että osaat osoittaa, että joukon $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ sulkeuma reaaliakselilla $\mathbb{R}$ on $]-\infty,-1]\cup[1,\infty[$.

p3. Onko joukko $\bigcup_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{2k},\frac{1}{2k-1}]$ suljettu reaaliakselilla $\mathbb{R}$? Entä $\bigcup_{k=1}^{\infty}[2k-1,2k]$?

p4. Varmistu, että tiedät, miksi kasautumispiste on aina myös kosketuspiste.

p5. Olkoon (X,d) diskreetti metrinen avaruus ja $A\subset X$ osajoukko. Onko joukolla A kasautumispisteitä avaruudessa (X,d)?

p6. Varmistu, että osaat osoittaa, että jos $A\subset B$, niin $\overline{A}\subset\overline{B}$.

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 41 (eli 10.-14.10.).

t1. Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia sekä olkoot $f\colon X\to Y$ ja $g\colon X\to Y$ jatkuvia kuvauksia. Oletaan, että $A\subset X$ on sellainen osajoukko, että $f|_A=g|_A$, eli että $f(x)=g(x)$ kaikilla $x\in A$.

(a) Osoita, että $\{x\in X\colon f(x)\neq g(x)\}$ on avoin joukko X:ssä.
(b) Osoita, että $\{x\in X\colon f(x)=g(x)\}$ on suljettu joukko X:ssä.
(c) Osoita, että $f|_{\overline{A}}=g|_{\overline{A}}$.

t2. Olkoon $X=]0,\infty[\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ ja olkoon d tason $\mathbb{R}^2$ euklidisen metriikan d_E rajoittuma joukkoon X.

(a) Osoita, että joukon $A=(]0,\infty[\cap\mathbb{Q})\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ sulkeuma avaruudessa (X,d) on koko avaruus X, eli että $\overline{A}=X$.
(b) Mikä on kohdan (a) joukon A sulkeuma euklidisessa tasossa $\mathbb{R}^2$?

t3. Olkoon $A=\{f\in C([0,1])\colon f(1/2)=1\}\subset C([0,1])$. Onko A suljettu joukko avaruudessa $(C([0,1]),d_\infty)$? Tässä d_∞ on metriikka $d_\infty(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$. (*Vinkki:* Hyödynnä joko kuvausta $E\colon C([0,1])\to\mathbb{R}$, $f\mapsto f(1/2)$, tai tutki komplementin $C([0,1])\setminus A$ avoimmuutta.)

(*Jatkokysymys:* Entä, jos metriikaksi valitaan $d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$?)

t4. Olkoon $C_b(\mathbb{R})$ reaaliakselin $\mathbb{R}$ jatkuvien ja rajoitettujen reaaliarvoisten funktioiden avaruus eli $C_b(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f \text{ on jatkuva}, \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty\}$ ja d_∞ sup-metriikka $C_b(\mathbb{R})$:ssä eli $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$.

Olkoon $A \subset C_b(\mathbb{R})$ niiden jatkuvien ja rajoitettujen funktioiden $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko, joilla on olemassa $M > 0$, jolle pätee $f(x) = 0$ kaikilla $|x| > M$, eli

$$A = \{f \in C_b(\mathbb{R})\colon \text{on olemassa } M > 0 \text{ että kaikilla } |x| > M \text{ pätee } |f(x)| = 0\}.$$

(a) Osoita, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, kuuluu avaruuteen $C_b(\mathbb{R})$, eli että $f \in C_b(\mathbb{R})$, mutta ei kuulu joukkoon A.

(b) Osoita, että edellisen kohdan funktio f on joukon A kasautumispiste. (*Vinkki:* Tarkastele esimerkiksi funktioita $f_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\varepsilon(x) = \max\{f(x) - \varepsilon, 0\}$, missä $\varepsilon > 0$.)

(c) Osoita, että A ei ole suljettu avaruudessa $(C_b(\mathbb{R}), d_\infty)$.

t5. Anna esimerkki sellaisista reaaliakselin $\mathbb{R}$ suljetuista epätyhjistä osajoukoista A ja B, joiden etäisyys on nolla, mutta joilla ei ole yhteisiä pisteitä, eli joille pätee sekä $d(A,B) = 0$ että $A \cap B = \varnothing$. Perustele vastauksesi. (*Vinkki:* Topologia Ib:n kurssilla opitaan, että tälläiset joukot A ja B eivät olla rajoitettuja.)