HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1a, syksy 2016
Harjoitus 4

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

p1. Olkoot X joukko ja $F(X, \mathbb{R})$ kaikkien funktioiden $f\colon X \to \mathbb{R}$ joukko kuten Väisälän kirjan luvussa 1.1. Varmistu, että osaat osoittaa joukon $F(X, \mathbb{R})$ vektoriavaruudeksi, kun yhteenlasku ja skaalarilla kertominen on määritelty pisteittäin (kuten Väisälän kirjassa).

p2. Varmistu, että osaat osoittaa jatkuvien funktioiden avaruuden $C([a, b])$ vektoriavaruuden $F([a, b], \mathbb{R})$ aliavaruudeksi.

p3. Varmistu, että tiedät, miksi funktio $||\cdot||_\infty\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$, joka on annettu kaavalla $||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, on normi. Varmistu myös , että tiedät, miksi funktio $||\cdot||_1\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$, $||(x_1, \ldots, x_n)||_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$, on normi.

p4. Varmistu, että tiedät, miksi funktio $||\cdot||_\infty\colon C([a, b]) \to [0, \infty[$, $||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, on normi. Varmistu myös, että tiedät, miksi funktio $||\cdot||_1\colon C([a, b]) \to [0, \infty[$, $||f||_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, on normi.

p5. Varmistu, että tiedät, miksi metriikat $d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_\infty(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$, ja $d_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, missä $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n)$, ovat preppaustehtävän **p3.** normien $||\cdot||_\infty$ ja $||\cdot||_1$ antamia(/indusoimia).

Varmistu myös, että tiedät, miksi metriikat $d_\infty\colon C([a, b]) \times C([a, b]) \to \mathbb{R}$, $d_\infty(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$, ja $d_1\colon C([a, b]) \times C([a, b]) \to \mathbb{R}$, $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, missä $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n)$, ovat preppaustehtävän **p4.** normien $||\cdot||_\infty$ ja $||\cdot||_1$ antamia(/indusoimia).

p6. (Pistetulon geometrinen tulkinta.) Olkoot v ja w kaksi lineaarisesti riippumatonta vektoria tasossa $\mathbb{R}^2$. Piirrä kolmio ABC, jonka kärkipisteet ovat origo (piste A), sekä pisteet v ja w. Olkoon γ kolmion ABC kärjessä C oleva kulma. Trigonometrian kosinilause sanoo, että $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$, missä c on sivun AB pituus, a on sivun BC pituus ja b on sivun AC pituus. (Katso esimerkiksi Wikipedia-artikkelin kuvaa.) Laske pistetulon määritelmän avulla, että $\cos(\gamma) = \frac{v\cdot w}{||v||||w||}$.

p7. Varmistu, että tiedät, miksi kuvaus $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ voidaan kirjoittaa muodossa $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)e_j$, missä f_j on f:n j:s koordinaattifunktio ja $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikanta.

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 40 (eli 3.-7.10.).

t1. (a) Osoita, että pistetulo $\cdot\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, eli kaavalla

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

määritelty funktio, on sisätulo vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$.

(b) Osoita, että funktio $d_E\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla

$$d_E((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2},$$

on metriikka vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$ (eli osoita, että euklidinen metriikka d_E todellakin on metriikka).

t2. (a) Osoita, että kuvaus $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \max\{x,y\}$, on jatkuva, kun molemmissa avaruuksissa on euklidinen metriikka.

(b) Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja olkoot $f\colon X \to \mathbb{R}$ sekä $g\colon X \to \mathbb{R}$ jatkuvia kuvauksia avaruudesta (X,d) avaruuteen $(\mathbb{R},d_E)$. Osoita, että kuvaus $H\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max\{f(x),g(x)\}$, metrisestä avaruudesta (X,d) avaruuteen $(\mathbb{R},d_E)$ on jatkuva. (*Vinkki:* Tarkastele kuvausta H yhdistettynä kuvauksena $H = T \circ F$ sopivalla kuvauksella F.)

t3. Olkoon (X,d) metrinen avaruus.

(a) Olkoon $A \subset X$ epätyhjä joukko. Osoita, että funktio $f_A\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,A)$, on jatkuva.

(b) Olkoot $A,B \subset X$ sellaiset epätyhjät osajoukot, että $d(A,B) > 0$. Osoita, että funktio $f\colon X \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla

$$x \mapsto \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},$$

on hyvin määritelty.

(c) Osoita, että (b) kohdan funktio f on jatkuva.

(*Huom:* Koska reaaliakselin $\mathbb{R}$ metriikasta ei ole mainintaa, käytetään $\mathbb{R}$:ssä siis eukliidista metriikkaa d_E.) (*Vinkki:* Kertaa tarvittaessa luku 2.9 Väisälän kirjasta.)

t4. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $C_b(X)$ kaikkien niiden jatkuvien funktioiden $f\colon X \to \mathbb{R}$ joukko, joille pätee $\sup_{x\in X}|f(x)| < \infty$.

(a) Osoita, että $C_b(X)$ on vektoriavaruus funktioiden pisteittäisen yhteenlaskun ja reaaliluvulla kertomisen suhteen.

(b) Olkoon $||\cdot||_\infty\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ funktio $||f||_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$. Osoita, että $||\cdot||$ on normi vektoriavaruudessa $C_b(X)$.

(Vektoriavaruutta $C_b(X)$ kutsutaan X:n rajoitettujen jatkuvien funktioiden avaruudeksi.)

t5. Olkoon (X,d) metrinen avaruus sekä olkoot $C_b(X)$ vektoriavaruus ja $||\cdot||_\infty\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ normi kuten tehtävässä **t4.**. Olkoon $d_\infty\colon C_b(X) \times C_b(X) \to [0,\infty[$ metriikka $d_\infty(f,g) = ||f-g||_\infty$. Olkoon $x_0 \in X$.

(a) Osoita, että jokaisella $a \in X$, funktio $f_a\colon X \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla $x \mapsto d(x,a) - d(x,x_0)$, kuuluu vektoriavaruuteen $C_b(X)$. (*Vinkki:* Hyödynnä Väisälän kirjan lausetta 2.10.)

(b) Osoita, että $d_\infty(f_a,f_b) \le d(a,b)$ kaikilla $a,b \in X$.

(c) Osoita, että $d_\infty(f_a, f_b) \geq d(a, b)$. (*Vinkki:* Laske funktion $x \mapsto f_a(x) - f_b(x)$ arvo pisteessä a tai b.)

(d) Osoita kohtien (a), (b) ja (c) avulla, että kuvaus $F\colon X \to C_b(X)$, joka on määritelty kaavalla $a \mapsto f_a$, on isometria (ja siten erityisesti jatkuva injektio) metrisestä avaruudesta (X, d) metriseen avaruuteen $(C_b(X), d_\infty)$. (Tämä on Kuratowskin upotuslause: *Jokainen metrinen avaruus voidaan etäisyydet säilyttäen kuvata normiavaruuden osajoukoksi.*)