HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1a, syksy 2016
Harjoitus 3

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.

p1. Olkoot (X,d) metrinen avaruus ja $f\colon X\to\mathbb{R}$ vakiofunktio $x\mapsto 8$. Varmista, että osaat osoittaa funktion f jatkuvaksi.

p2. Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia. Olkoon myös $x_0\in X$ ja $f\colon X\to Y$ kuvaus, joka toteuttaa sellaisen ehdon, että jokaisella $\varepsilon\in(0,1)$ on olemassa $\delta\in(0,1)$, jolle pätee $fB_d(x_0,\delta)\subset B_{d'}(f(x),\varepsilon)$. Mitä eroa tällä on jatkuvuuden määritelmään pisteessä? Varmistu, että tiedät, miksi kuvaus f on jatkuva pisteessä x_0.

p3. Varmistu, että tiedät miksi inkluusiokuvaus $\iota\colon A\to X$, $x\mapsto x$, on jatkuva metrisestä avaruudesta (A,d_A) metriseen avaruuteen (X,d), missä $A\subset X$ on osajoukko ja d_A on metriikan d rajoittuma joukkoon A.

p4. Kuvausta $f\colon X\to Y$ metrisestä avaruudesta (X,d) metriseen avaruuteen (Y,d') kutsutaan *isometriaksi*, jos $d'(f(x),f(y))=d(x,y)$ kaikilla $x,y\in X$. Ovatko isometriat aina jatkuvia? (Piirrä tilanteesta kuva ensin tapauksessa, jossa sekä (X,d) että (Y,d') on metrinen avaruus $(\mathbb{R},d_E)$.) Mitä yhteyttä tällä on edelliseen preppaustehtävään?

p5. Olkoon $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ funktio $x\mapsto x^2$. Onko f Lipschitz funktio, kun sekä lähtö- että maaliavaruudessa on euklidinen metriikka? (*Vinkki:* Onhan se. Kokeile raakaa arviointia tai vaihtoehtoisesti väliarvolausetta.) Entä, jos f on määritelty välillä $[0,2]$? Entä jos välillä $[0,\infty[$?

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 39 (eli 26.-30.9.).

t1. Olkoon $X=([1,\infty[\times\{0\})\cup(\{1\}\times[0,\infty[)\subset\mathbb{R}^2$ ja olkoon $f\colon X\to\mathbb{R}$ funktio, joka on määritelty kaavalla

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & y=0,\\ y, & y>0.\end{cases}$$

Osoita, että

(a) f ei ole jatkuva pisteessä $(1,0)$ ja että

(b) f on jatkuva jokaisessa osajoukon $]1,\infty[\times\{0\}$,

kun lähtöjoukossa X on metriikka d, joka on metriikan d_∞ rajoittuma joukoon X, ja maalijoukossa $\mathbb{R}$ on euklidinen metriikka d_E. (*Vinkki:* Aloita piirtämällä joukko X ja hahmottelemalla funktion f arvoja joukon X eri osissa. Varmistu myös ensin, että tiedät millaisia avaruuden (X,d) kuulat $B_d(z_0,r)$ ovat.) (*Jatkotehtävä:* Onko f jatkuva jokaisssa osajoukon $\{1\}\times]0,\infty[$ pisteessä?)

t2. Määritellään kuvaus $I\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ niin, että funktion I arvo pisteessä $f \in C([0,1])$ on funktion f integraali funktio $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla
$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$
eli I on funktio $f \mapsto F$. Osoita, että kuvaus I on jatkuva, kun lähtöavaruudessa on metriikka d_1 ja maaliavaruudessa on metriikka d_∞? (Vinkki: Älä hämäänny, että kuvaus I saa argumentikseen ja arvoikseen funktioita. Kuvaus I voidaan itseasiassa osoittaa Lipschitz-kuvaukseksi.)

t3. Olkoon $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio
$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(a) Onko funktio h jatkuva, kun sekä lähtö- että maaliavaruudessa on metriikka d_E?

(b) Entä onko funktio h jatkuva, kun maaliavaruudessa on metriikka d_E, mutta lähtöavaruudessa metriikka d_f kuten harjoitusten 1 tehtävässä 5? Tässä siis d_f on reaaliakselin $\mathbb{R}$ metrikka, joka on annettu kaavalla $d_f(x,y) = d_E(f(x), f(y))$, missä $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ on funktio $f(x) = (x, 1)$, jos $x \in \mathbb{Q}$, ja $f(x) = (x, -1)$, jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (*Vinkki:* Katso myös mitä harj. 1. teht. 5. sanoo tämän metriikan kuulista.)

t4. Olkoot (X,d), (Y,d') ja (Z,d'') metrisiä avaruuksia ja $L, L' \geq 0$ lukuja. Oletetaan, että $f\colon X \to Y$ on L-Lipschitz kuvaus ja että $g\colon Y \to Z$ L'-Lipschitz kuvaus. Osoita, että yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to Z$ on L''-Lipschitz, missä L'' on luku $L'' = LL'$.

t5. Anna esimerkki funktiosta $f\colon [0,1] \to [0,1]$, joka on jatkuva, mutta ei ole Lipschitz, kun metriikka sekä lähtö- että maaliavaruudessa on d_E. (Vinkki: Ihan tututkin funktiot voivat ovat tälläisiä. Etsi sellaista funktiota, joka on derivoituva välillä $]0,1[$.)