

**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Topologia 1a, syksy 2016**  
**Harjoitus 2**

**Preppaustehtävät**

*Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa.*

- p1.** Varmistu, että avoimet välit  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  ovat avoimia joukkoja avaruudessa  $(\mathbb{R}, d_E)$ .
- p2.** Varmistu, että metriikan  $d_\infty$  kuulut tasossa  $\mathbb{R}^2$  ovat neliöitä eli, että  $B_{d_\infty}((x, y), r) = ]x - r, x + r[ \times ]y - r, y + r[$  kaikilla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ja  $r > 0$ .
- p3.** Varmistu, että osaat osoittaa seuraavat yhtäsuuruudet: Olkoon  $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $r > 0$  ja  $L = \{x_0\} \times \mathbb{R}$ . Tällöin  $B_{d_E}(z_0, r) \cap L = B_{d_1}(z_0, r) \cap L = B_{d_\infty}(z_0, r) \cap L = \{x_0\} \times ]y_0 - r, y_0 + r[$ . (Piirrä ainakin kuva tilanteesta!)
- p4.** Varmistu, että osaat osoittaa tason  $\mathbb{R}^2$  osajoukon  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$   $d_\infty$ -avoimeksi.
- p5.** Varmistu, että  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  on diskreetti joukko avaruudessa  $(\mathbb{R}, d_E)$ .

**Harjoitustehtävät**

*Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 38 (eli 19.-23.9.).*

- t1.** Olkoot  $A = [-1, 1] \times \{0\}$  ja  $B = \{0\} \times ]0, 1]$  sekä olkoon  $U \subset \mathbb{R}^2$  tason  $\mathbb{R}^2$   $d_E$ -avoin joukko, joka sisältää joukon  $A$ .
- (a) Osoita, että  $U \cap B \neq \emptyset$ . (Vinkki: Piirrä kuva!)
- (b) Osoita myös, että on olemassa  $d_E$ -avoin joukko  $V \subset \mathbb{R}^2$ , joka sisältää joukon  $B$  ja jolle pätee  $V \cap A = \emptyset$ . (Vinkki: Piirrä kuva ja mieti minkälaisia avoimia joukkoja tunnet.)
- t2.** Olkoon  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$  tason  $\mathbb{R}^2$  osajoukko.
- (a) Osoita, että  $U$  on avoin tasossa  $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$  (eli  $d_\infty$ -avoin). (Vinkki: Kuva! Tarkastele ensin erikoistapausta  $(x, y) = (2, 1)$ . Varaudu arvioimaan.)
- (b) Osoita vastaavalla perustelulla, että myös joukko  $V = \{(x, y) : y < -x\}$  on  $d_\infty$ -avoin. (Vinkki: Toinen kuva!)
- (c) Todista, että joukko  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < |x|\}$  on  $d_\infty$ -avoin. (Vinkki: Hyödynnä kohtia (a) ja (b).)
- t3.** Olkoot  $X = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup ((\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^2$  ja  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$  tason  $\mathbb{R}^2$  euklidisen metriikan  $d_E$  rajoittuma joukkoon  $X$ . Onko joukko  $[-1, 1] \times \{0\} \subset X$  avoin joukko metrisessä avaruudessa  $(X, d)$ ? (Vinkki: Piirrä kuva! Varaudu arvioimaan.)
- t4.** Olkoon  $X = \{(1/m, 1/n) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1/m, 0) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ . Etsi avaruuden  $(X, d)$  erakkopisteet, kun  $d$  on jälleen euklidisen metriikan  $d_E$  rajoittuma joukkoon  $X$ . (Vinkki: Piirrä kuva! Varaudu jälleen arvioimaan.)
- t5.** Olkoon  $X$  joukko ja olkoot  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$  ja  $d' : X \times X \rightarrow [0, \infty[$  sellaisia metriikoita joukossa  $X$ , joille seuraava ehto on voimassa: kaikilla  $x \in X$  ja  $r > 0$  on olemassa sellaiset luvut  $s > 0$  ja  $t > 0$ , että  $B_d(x, s) \subset B_{d'}(x, r)$  ja  $B_{d'}(x, t) \subset B_d(x, r)$ . Osoita, että joukko  $U \subset X$  on  $d$ -avoin, jos ja vain jos se on  $d'$ -avoin.