HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia 1a, syksy 2016
Harjoitus 1

Preppaustehtävät

Näitä tehtäviä ei käsitellä laskuharjoituksissa eikä niistä myöskään saa lisäpisteitä.

p1. Varmistu, että reaalilukujen itseisarvosta $|\cdot|$ johdettu funktio $d_E(x,y) = |x-y|$ todellakin on metriikka.

p2. Miksi funktio $d_\infty\colon C([a,b])\times C([a,b]) \to [0,\infty[$, joka on määritelty kaavalla $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$, on metriikka joukossa $C([a,b])$?

p3. Olkoon X joukko ja $d\colon X\times X \to [0,\infty[$ funktio, joka on määritely kaavoilla $d(x,y) = 1$, jos $x \neq y$, ja $d(x,y) = 0$, jos $x = y$. Varmistu, että (X,d) on metrinen avaruus. Millaisia ovat sen kuulat $B_d(x,r)$?

p4. Selitä Väisälän kirjan lauseen 2.10 tulos kuvalla.

p5. Selitä Väisälän kirjan lauseen 2.15 tulos kuvalla.

Harjoitustehtävät

Näitä tehtäviä käsitellään laskuharjoituksissa viikolla 37 (eli 12.-16.9.).

t1. Olkoot $d_1\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to [0,\infty[$ ja $d_\infty\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to [0,\infty[$ tason $\mathbb{R}^2$ metriikat, jotka on määritelty kaavoilla $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ ja $d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$, missä $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Osoita, että kuula $B_{d_1}(0,r)$ sisältyy kuulaan $B_{d_\infty}(0,r)$ jokaisella $r > 0$.

(b) Etsi sellainen $R > 0$, että $B_{d_\infty}(0,1) \subset B_{d_1}(0,R)$.

(Vinkki: Piirrä kuva!)

t2. (Kolmioepäyhtälön geometrisia tulkintoja) Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Osoita kolmioepäyhtälöä käyttäen seuraavat väitteet:

(a) Olkoot $x \in X$, $r > 0$ ja $y \in B_d(x,r)$. Tällöin $B_d(y,s) \subset B_d(x,r)$ kaikilla $s \in]0, r-d(x,y)]$. (Jatkotehtävä: Johda tästä havainnosta tulos $B_d(y,t) \subset B_d(x, d(x,y)+t)$ kaikilla $t > 0$.)

(b) Olkoot $x,y \in X$ ja olkoot luvut $r,s > 0$ sellaisia, että $r+s < d(x,y)$. Tällöin $B_d(x,r) \cap B_d(y,s) = \varnothing$.

(Vinkki: Piirrä kuva! Jälkimmäinen vastaoletuksella.)

t3. Olkoon $C([0,1])$ kaikkien jatkuvien funktioiden $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ joukko. Pidetään tunnettuna, että funktiot $d_\infty\colon C([0,1])\times C([0,1]) \to [0,\infty)$ ja $d_1\colon C([0,1])\times C([0,1]) \to [0,\infty)$, jotka on määritelty kaavoilla $d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$ ja $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$, missä $f,g \in C([0,1])$, ovat hyvin määriteltyjä metriikoita joukossa $C([0,1])$.

(a) Osoita, että jokaisella $f \in C([0,1])$ ja $r > 0$ pätee $B_{d_\infty}(f,r) \subset B_{d_1}(f,r)$. (Vinkki: Mieti funkion f kuvaajaa.) (Jatkokysymys: Entä jos tarkastellaan avaruutta $C([a,b])$?)

(b) Osoita, että jokaisella $r > 0$ pätee $B_{d_1}(\underline{0},r) \not\subset B_{d_\infty}(\underline{0},1/2)$, missä $\underline{0}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on nollafunktio, eli vakiofunktio $x \mapsto 0$. (Vinkki: Tarkastele jatkuvaa funktioita $f_r\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{1 - x/r, 0\}$. Funktion f_r jatkuvuutta ei tarvitse todistaa. Piirrä kuva!)

t4. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ injektio. Määritellään funktio $d_f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty[$ kaavalla $d_f(x,y) = d_E(f(x), f(y))$, kun $x, y \in X$, missä d_E on tason $\mathbb{R}^2$ euklidinen metriikka (eli $d_E((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{1/2}$), joka oletetaan tunnetuksi. Osoita, että $(\mathbb{R}, d_f)$ on metrinen avaruus. (Vinkki: Aloita rohkeasti ehtojen (M1)-(M3) tarkastaminen! Käytä apuna metriikan d_E vastaavia ehtoja.) (Jatkokysymys: Miten tehtävä muuttuu, jos tarkastellaan injektiota $f\colon X \to Y$ joukolta X metriseen avaruuteen (Y,d)?)

t5. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ kaavalla

$$x \mapsto \begin{cases} (x,1), & x \in \mathbb{Q} \\ (x,-1), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

määritelty kuvaus ja olkoon d_f metriikka kuten edellisessä tehtävässä.

(a) Osoita, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $r \in]0,2[$ pätee

$$B_{d_f}(x,r) = \begin{cases}]x-r, x+r[\cap \mathbb{Q}, & \text{jos } x \in \mathbb{Q} \\ ]x-r, x+r[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), & \text{jos } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(b) Osoita, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $r > 2$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$]x-\delta, x+\delta[\subset B_{d_f}(x,r).$$

(Vinkki: Piirrä kuva!)