Laskuharjoitus 8

14:45 » Pohdinko tehtävää 3b oikein, jos ajattelen, että on kaksi tapa varmistua samasta lopputulemasta: 1) johdetaan reunajakaumille (eräät) tiheysfunktiot integroimalla vuorotellen x ja y "kokonaan pois" ja sitten etsitään jotkin sopivat joukot, jossa X:n integraali yli välin [a, b] * Y:n integraali yli välin [c, d] on eri asia kuin (X, Y):n tasointegraali yli karteesisen tulon [a, b] x [c, d]
14:47 » 2) etsitään jokin joukko, jossa X:llä ja Y:llä todennäköisyysmitta > 0, mutta (X, Y):n tn-mitta tässä joukossa = 0. (Mukaillen monisteen esimerkkiä 7.3.)
20:45 » 14:45,14:47: olet hyvin jäljillä pohdinnassasi. Tässä 2) toimii mainioisti, mutta jos esim. f(x,y) = x+y, kun 0 < x,y < 1, niin P(X,Y ∈ R) > 0 kaikilla suorakaiteilla R, joiden pinta-ala > 0 ja leikkaavat [0,1]^2:sta... – PetteriP (*)
20:48 » ... Lähestyminen 1) toimii (eli määrää tulon f_X(x) f_Y(y) ja näyttää että tämän integraali yli jonkin suorakaiteen R (voi olla hyvinkin pikkuruinen eli "lähes" piste) eroaa f_{X,Y}:n integraalista yli samaisen suorakaiteen. – PetteriP (*)
23:15 » 14:45--20:45: Jatkoksi vielä tapoihin tutkia satunnaisvektorin sm:ien riippumattomuutta: eikö kovarienssien laskeminen toimi "mekaanisesti" myös, jos haluaa osoittaa riippuvuuden? (Riippumattomuudessa ei taida antaa kuin välttämättömän, mutta ei riittävää ehtoa?)
08:07 » 23:15: aivan :) jos X:n ja Y:n kovarianssi ei ole nolla, niin X ja Y eivät voi olla riippumattomia. Jos se on nolla, niin tarvitaan lisätarkasteluja.Tämä on mainio täydennys työkalupakkiin :) Eli tapoja on monia :) Ja seuraavassa luvussa (luku 8) saamme "uuden" tavan, joka oikeastaan vain aukaisee tätä kysymystä lisää :) – PetteriP (*)
23:25 » Tehtävässä 4 saan toisella tavalla odotusarvovektoriksi joko (jotain y:stä riippuvaa , jotain x:stä riippuvaa) tai (15/24 , 5/6). Onko näistä jompikumpi lähellä totuutta? Ensimmäisen laskutapa mielestäni järkevämpi mutta toisen vastaus tuntuu fiksummalta.
23:26 » ...tuossa tuli siis molemmat eri vastaukset kerrottua.
00:24 » 23:25--26: Kaksi asiaa, mitä itse tässä miettisin: mitä X:n ja Y:n reunajakauma ovat, tai mitä muotoa niiden tiheysfunktiot ovat. Oma ymmärrykseni on, että reunajakaumien johtamisessa yritetään nimenomaan saada esitettyä toinen sm:sta "itsenäisenä", viittaamatta toiseen. Eli X:n tiheysfunktiossa varsinaisia muuttujia ei yleensä pitäisi olla kuin yksi.
00:27 » Ja se toinen olisi miettiä, mikä odotusarvo on: itse samaistan sen mielessäni (vähän mutkia suoristaen) epäoleelliseen määrättyyn integraaliin, eli kyseessä on jokin reaaliluku. Kun on annettu jokin tietty jakauma, ei tämän reaaliluvun enää pitäisi riippua muuttujista kuten x tai y. (Ja, jos jakauma on riittävän pitkälle yksilöity, ei enää oikeastaan mistään parametreistakaan: sillä on yksikäsitteinen lukuarvo.) Eli sanoisin, että 15/24 = 5/8 ja 5/6 minusta "näyttävät hyviltä" :)
00:33 » (Tuo eka huomio siis liittyi siihen oletukseen, että olet varmaankin johtanut odotusarvoa integroimalla x*f_X(x) dx ja y*f_Y(y) dy yli reaaliakselin, kun f_X ja f_Y oli johdettu tehtävässä 2. Jos esim. ekasta integraalista tulee jotain, jossa on mukana y:tä, näyttäisi minun silmääni siltä, että tiheysfunktiossakin voi olla jotain hassua :)
10:31 » 00:24 - 00:33 Kiitos vastauksesta! Tiheysfunktioni ovat muotoa f_X(x) on vain x:stä riippuvaa jne.. Ongelma tuli kai noiden integrointirajojen kanssa odotusarvoa laskettaessa. Esim X:n odotusarvossa rajat 0...y vai 0...1. Jälkimmäisellä saa tietysti reaaliarvoisen ratkaisun, mutta aiheuttaa hieman hämmennystä alkuperäisen funktion huomioonottaen.
11:15 » kuvan piirtäminen voi auttaa, mutta tosiaan, kun X:lle on saatu jokin selkeä tf, sillä operoitaessa ei enää tarvitse miettiä, miten se suhtautuu y:hyn. integroinnin idea on siis "summata" kullakin x koko tn-massa sille x:lle (pidetään x vakiona ja integroidaan eli summataan yli mahdollisten y).
11:36 » Aivan.. Asia vaatii vielä hieman pureskelua mutta kiitos :)
12:27 » 11:30: yksi mitä voi vielä pohtia on miettiä jotain melko yksinkertaista esimerkkiä, esim.

tasajakauma kolmiossa, ja miettii, mitä integrointi yhden muuttujan suhteen siinä "tekee" (itse ajattelen, että se summaa tn-massaa yli x-, y-, z-akselien suuntaisten suorien). Odotusarviota taas voi ajatella myös lauseiden 7.6, 7.7 sovelluksena, kun g:ksi valitaan g(x, y)=x tai g(x, y)=y. Tai esimerkin 7.4 sovelluksena, kun a=1, b=0 tai päinvastoin.
15:55 » 23:25 ja 23:26 sekä 10:31: saitkin jo tukea integrointiin. Laitan tänään esimerkkejä kurssisivulle vastaavanlaisista integroinneista, indikaattoreista ja muusta. :) – PetteriP (*)
13:43 » K8 T3 b) Yritän määrittää X:n reunajakaumaa. Käytänkö yläintegrointirajana 3 vai x, vai jotain ihan muuta?
14:01 » 13:43 3
14:52 » Mites tossa ekassa tehtävässä laitan X/3 tilalle integroidessa?
15:25 » se x/3 tulee integrointirajaksi. minusta kannattaa kirjoitella noita joukkoja, joiden yli integroi, kuvina/joukkomäärityksinä eri tavoin auki, siitä on tehtävissä ainakin itselleni hyötyä.
17:19 » 14:52: kuten 15:25 sanoi, niin kannattaa _aina_ piirtää kuva siitä joukosta, missä integroitava saa 0:sta eroavia arvoja (tätä joukkoa nimitetään _kantajaksi_). Kun systemaattisesti siirtää ensin kaikki integroimisrajat indikaattoreihin ja tekee sieventelyt "kuvien" avulla, homma selkenee. Teen kurssisivulle (piakkoin) esimerkkejä indikaattorilaskelmista ja integroimisjoukkojen käsittelystä niillä. – PetteriP (*)

Muut asiat

12:57 » Onko sanalle "probabilistic" jotain hyvää yleiskielistä suomennosta? Tai keksiikö joku? Erityisesti mietin adjektiivia, joka sopisi esimerkiksi sanojen "lähestymistapa" tai "ajattelu" eteen. (Probabilistic approach, probabilistic thinking.)
20:59 » 12:57: erittäin hyvä kysymys. Eräs mahdollinen suomennos, joka on varsin yleinen, on "todennäköisyyspohjainen" (joka sopii minunkin suuhuni ihan kohtuullisesti: "tojennäkösyyspohojane"), mutta on kyllä hieman raskas. Usein käytetään myös (kieltämättä heikkoa) selviöväännöstä "probabilistinen". Mutta jos keksitte paremman suomennoksen, niin kertokaa ihmeessä :) Hyvät suomennokset ovat erittäin tärkeitä. – PetteriP (*)
20:46 » Löysin yhden ratkaisun probabilistic-suomennokseen: Kimmo Pietiläinen näyttäisi käyttävän ainakin ilmaisuja "todennäköisyyksiin perustuva ajattelu" tai "ajattelu/lähestymistapa, joka perustuu todennäköisyyksiin". Se on selkeä, ymmärrettävä eikä kovin kankea, mutta toki vähän pitkä. Ehkä kuitenkin tarjolla olevista vaihtoehdoista paras. :) – 12:57
20:53 » 20:46: itse en käyttäisi muotoa "todennäköisyyksiin perustuva" vaan joko "todennäköisyyslaskentaan perustuva" tai (mikä paremmin) "todennäköisyysteoriaan perustuva", sillä tämä kuvaa mielestäni käsitettä "probabilistic" tarkemmin... – PetteriP (*)
21:10 » ... esimerkiksi olen omissakin töissäni käyttänyt usein käsitettä "probabilistic interpretation", mitä en suomentaisi "todennäköisyyksiin perustuvana tulkintana", sillä ajatus "tulkinnasta" ei yleensä varsinaisesti perustu todennäköisyyksiin, vaan siihen, että erilaisia ilmiöitä voidaan käsitellä myös todennäköisyysteorian (tyypillisesti stokastisten differentiaaliyhtälöiden teorian) keinoin, eräänlaisen "todennäköisyyden käsitteeseen perustuvan intuition" pohjalta. – PetteriP (*)
21:12 » Mitenkäs olisi "todennäköisyysteoreettinen"? – Joonas
21:12 » 21:12: hmm... aika hyvä :) – PetteriP (*)
21:14 » ... taidan ruveta käyttämään tuota :) – PetteriP (*)
21:14 » ... kiitos Joonas. :) – PetteriP (*)
21:17 » Populaarikirjallisuudessa (esim. Silverin ja Tetlockin&Gardnerin kirjat) probabilistic thinkingillä viitataan, minusta, ajatteluun, jossa suhtaudutaan maailmaan pohjimmiltaan epävarmana ja omaan ymmärrykseen vajavaisena/jatkuvasti täydentyvänä. Luulen, että ajattelussa ei tässä muodossa aina ole kovin syvällistä tn-teoriaa taustalla.

21:18 » ...eli voi olla, että (*gasp*!) eri sanat sopivat paremmin joihinkin tilanteisiin kuin joihinkin toisiin? :)
21:29 » 21:18: aivan :) mielestäni kaikki esitetyt sopivat hyvin erilaisiin tilanteisiin, joten "probabilistic" kannattaakin suomentaa aina tarpeen ja tilanteen mukaan :) – PetteriP (*)
21:32 » ... ja siksi aionkin käyttää noita kaikkia tilanteesta riiippuen :) ne kuvaavat mielestäni samanlaista maailmankuvaa hieman eri lähtökohdista, aivan kuten käsitteet "todennäköisyyslaskenta" ja "todennäköisyysteoria" :) – PetteriP (*)

20:30 » 15:55 jatkoa: esimerkki mitä suunnittelin (jossa integroimisrajoista on enemmän) paisuikin joten saan sen skannattua vasta huomenna aamulla. – PetteriP (*)
11:48 » Tiedoksi myös tänne, että koetulos on nyt nähtävillä "Koetulokset" sivulla. Kurssisivulla on sinne linkki. – PetteriP (*)
18:33 » H8T5: Vaikka laskujen kannalta asia on merkityksetön, niin kysynpä kuitenkin. Jos sanotaan että sv:lla (X,Y) on tasajakauma ympyrässä, niin lasketaanko, että piste (X,Y) on ympyrässä (ympyrän "sisällä") jos se on reunalla?
18:35 » Mietin vain, että eikös esimerkiksi topologi (ja varmaan loogikkokin) ajattelisi reunapisteistä, että ne eivät ole ympyrässä eivätkä sen ulkopuolella..
18:36 » Tilastotieteilijä ei tällaisia varmaankaan ajattele lainkaan :D Mutta kun tuli nuo kurssit käytyä, niin jälkensä ne jättivät..
20:47 » 18:33-36: Itse järkeilisin seuraavasti: kiekon kehä (jota joskus kutsutaan ympyräksi, joskus ympyrän kehäksi) on nollamittainen . Näin on esim. sen perusteella, että ainoa järkevä pinta-ala, joka kehälle (jonka "paksuus" on siis nolla) voidaan antaa, on nolla. Ymmärtääkseni ne pisteet eivät ole siis vain "laskujen kannalta" merkityksettömiä, vaan voimme sanoa, että tn-mitta sille, että jatkuvalla yhteisjakaumalla piste (X, Y) on tismalleen ympyrän kehällä, on tasan nolla.
20:56 » 18:33-18:36: hyvä kysymys :) terminologia on tässä (taas kerran) hieman heittelevää. Ajattelin ensin kirjoittaa "ympyräkiekossa", sillä ympyrällä saatetaan tarkoittaa myös kehää (aivan kuten 20:47 sanoikin :) mutta hups, unohtui. :) Eli ensinnäkin tarkoitin kirjoittaa "ympyräkiekossa"... – PetteriP (*)
20:58 » ... mutta takaisin kysymykseen. Aivan kuin 20:47 järkeilikin, todennäköisyys että (X,Y) on ympyräkiekon kehällä (reunalla) on nolla (tämän voi päätellä esimerkiksi laskemalla millä tn:llä (X,Y) on sanotaan h:n päässä reunasta ja päättelemällä tn-mitan monotonisuudella, että P((X,Y) on reunalla) = 0... – PetteriP (*)
21:00 » ... todennäköisyyden kannalta reunalla _voi olla_ merkitystä, mutta ei tässä kysymyksessä :) Eli "ympyräkiekkossa" olisin voinut lisätä määreet "avoimessa", "suljetussa" (tai jotain niiden väliltä). – PetteriP (*)
21:05 » heps, kiitokset vastauksista molemmille.
21:06 » Selvensi asiaa :)
21:06 » Ja kuten 20:47 järkeili, itse asiassa nollamittaisuuden (sen kuuluisan Lebesguen mitan suhteen) voisi määritellä vaikka seuraavasti: kuution Q = [-M,M] × [-M,M] osajoukko A on nollamittainen, jos P((X,Y) ∈ A) = 0 kun (X,Y):llä on tasajakauma kuutiossa Q. – PetteriP (*)
21:10 » hmm... tätä täytyy kyllä hieman sulatella (21:06) :) Huomasin muuten tuota vitosta tehdessäni, että kun laskettiin sm:n X tf., niin samaan tiheysfunktioon päädytään myös jos tehtävänanto muotoillaan muuten samalla tavalla, mutta ympyrän keskipisteeksi annetaan ((1/2), a), missä a on mikä tahansa positiivinen reaaliluku. Eikös totta?
21:10 » ... tuo siis tasossa. Ja itse asiassa jos A on kuution Q jokin (mitallinen) osajoukko, niin sen Lebesguen mitta m(A) = M^2 * P((X,Y) ∈ A), ja tämäkin edelleen tasossa :) Kaikki muutkin ulottuvuudet n toimisivat samoin (paitsi M^2 korvattaisiin M^n:llä). – PetteriP (*)
21:10 » 21:10: totta :) – PetteriP (*)
21:14 » hups... meinasin spoilata X:n jakauman :D Eli kysyn mieltä askarruttaneen lisäkyssärin edelliseen myöhemmin. Yritän sulatella tuota kuutiota vielä kenties tänään :)

21:22 » 21:14: jos vertaa tuota mitä alla kirjoitin luentojen tasajakauman määritelmään, huomaa että tällä hetkellä käytin etevästi kehäpäätelmää (tasajakauma on määritelty pinta-alan (Lebesguen mitan) avulla, jonka sitten määritelin alla tasajauman avulla :). Mutta ajatus on, että kunhan jomman kumman pystyy jotenkin määrittelemään, saa kehän katkaistua. Tähän tarvitaan lisätyökaluja (joko tn-teoriasta tai mitan kurssilta) :)... eli lähinnä korostin näiden asioiden läheisyyttä. – PetteriP (*)