Laskuharjoitus 7

Tehtävä 1

14:07 » Onko tehtävässä 1 tarkoitus "unohtaa" ylärajaa |X-7|:n tn:lle arvioitaessa todennäköisyys P(X ≤ 3)?
14:44 » 14:07: tehtävässä 1 on eräässä kohdassa tarkoitus "unohtaa" (tai arvioida "pois" :) P(X ≤ 3). – PetteriP (*)
14:33 » Ei aukea tehtävät. Ihan H7T1 alkuun pääsemisessä tarvitsisin neuvoja.
16:05 » Juu ei aukea täälläkään :D
16:17 » 14:33, 16:05: ensin kannattaa ajatella helpompaa tehtävää: oletetaan, että lukuja on vaikka 8 ja n_1 = 0, n_2 = 4, n_3 = 0, n_4 = 2 = n_5. Tällöin P(X=2) = 4/8, P(X=4)=P(X=5) = 2/8, joten EX = 2*(4/8)+4*(2/8)+5*(2/8) = (2*4+4*2+5*2)/8 = (2+2+2+2+4+4+5+5)/8... – PetteriP (*)
16:18 » ... miten tämä liittyy lukujen keskiarvoon :) Vastaavasti EX^2 = 2^2*(4/8) + 4^2*(2/8)+5^2*(2/8) = (2^2+2^2+2^2+2^2+4^2+4^2+5^2+5^2)/8... – PetteriP (*)
16:20 » ... Nyt voi miettiä, miten tämän saman voisi tehdä tehtävänannon tilanteessa (kun lukuja on hieman enemmän, perustelujen ei tarvitse olla hirveän formaaleja :) – PetteriP (*)
16:23 » Saan ykkösen odotusarvoksi 7nk, missä nk=luvun k esiintymiskertojen lkm. Mikähän tässä nyt menee pieleen? Luulisi, että pitäisi saada 7, kun eikös keskiarvo ole se "paras" odotusarvon estimaatti
16:24 » * korjaus edelliseen: siis tehtävän 1 odotusarvoksi saan 7nk
17:16 » 16:24: hmm... jos ajattelet vaikka, että EX = sum_k (k * n_k/4000000), niin n_k:ta ei pitäis näkyä, sillä se on "summattu pois" :). Alla olen antanut tavan yrittää yksinkertaisempaa tehtävää (kts. 16:17, 16:18, 16:20 tuolla alempana), joka valaissee asiaa. – PetteriP (*)
20:30 » Markovin epäyhtälö tuntuu hieman hassulta. Sillä jos olisi vaikkapa EX=3 ja valitaan a=2, niin P(X>=2)<=3/2 > 1. Ja tn:hän on aina yks tai alle. Oleellistahan tuossa on, että tn on PIENEMPI tai yhtäsuuri kuin EX/a, mutta tuntuu silti hölmöltä, että arviot voivat olla yli ykkösen. Ei kovin hyödyllistä?
20:41 » ...tai sitten olen ymmärtänyt päin honkia :D terveisin 20:30
20:43 » 20:30: Minusta olet ymmärtänyt ihan oikein, tätähän käsiteltiin esim. luennolla tänään. Ei toisaalta ole kauhean harvinaista matematiikassa, että epäyhtälöt eivät anna kauheasti todellista lisäinformaatiota ratkaistavasta pulmasta :)
20:45 » 20:30: Markovin ey on hieman hassu. Jos EX = 3 (tai vaikka EX = 2002), niin se kertoo "hyödyllisen tiedon" P(X >= 2) ≤ 3/2 (tai jopa 2002/2 = 1001). Tietysti tämä ei ole kovin vaarallista, sillä tottahan se varmastikin on, sillä aina P(X >= 2) ≤ 1 ≤ 3/2 (tai ≤ 1001). Ey alkaakin kertoa jotain oleellista, vasta kun a > EX. Olet tajunnut sen vallan mainiosti :) – PetteriP (*)
20:46 » Jees, kiitokset 20:43 :) En valitettavasti pääse lainkaan luennoille, joten "oman pään" ja kurssimatskun lukemisen varassa mennään.
20:46 » Ja kiitos myös Petteri 20:45.
20:46 » ... ja kuten 20:43 sanoi, mainitsin saman luennolla tänään(kin) :) 20:46. Mutta suurilla a (esim. jos a = 10^6), on hyöty jo melkoinen :) – PetteriP (*)
20:53 » 20:46: eipä kestä :) ja kiitos 20:43:lle mainiosta vertaistuesta :) Hieman raskaampi reitti tuo itselukeminen luultavasti on, joten tsemppiä :) ja täältä voi aina kysyä. – PetteriP (*)
21:14 » Tehtävän 1 tsebysev-arvio 1/16 ?
21:35 » 21:14: kuullostaa hyvältä :) – PetteriP (*)

Tehtävä 2

10:43 » Onko vk7H2 1/EX^4 sama kuin 1/(EX)^4?

11:00 » 10:43: Tällä kurssilla E on kai operaattorina heikompi kuin potenssimerkki, eli potenssi lasketaan ensin. Eli 1/EX^4 lienee 1/E(X^4). Vrt. miten momentit kirjoitetaan monisteen sivulla 60 ai 62 tai luentokalvoilla.
11:21 » ...itse rinnastan E:n mielessäni derivaattaoperattoriin D. Erityisesti molemmat ovat a) lineaarisia ja b) mielekkäitä operaatioita vain funktioille. (Merkintä "Ea", missä a on vakio, tarkoittaa minusta lopulta odotusarvon ottamista vakiosm:sta eli vakiofunktiosta f: Omega -> R, jossa f(x) = a kaikilla x.) Tämä saattaa selkeyttää ajattelua, tai sitten ei. :) Sulut ovat joskus välttämättömiä, toisinaan niitä voi läiskiä pelkästään väärinymmärrysten riskin vähentämiseksi.
13:22 » 10:43: kuten 11:00 sanoikin, niin tällä kurssilla E on lineaarinen kuvaus. Sulkeiden merkitys on kertoa, missä järjestyksessä operaatiot lasketaan. Esim 1 + 2 + 3 voi tarkoittaa joko (1 + 2) + 3 tai 1 + (2 + 3), mutta tiedämme, että tässä tapauksessa ongelmaa ei ole :) 1 + 2 * 3 voisi tarkoittaa joko (1 + 2) * 3 tai 1 + (2 * 3). Olemme sopineet, että se tarkoittaa jälkimmäistä. :) ... – PetteriP (*)
13:23 » ... ja tavanomaisesti laskutoimituksille olemme sopineet että 1. sulkeet, 2. potenssi, 3. {*, /} vasemmalta oikealle ja 4. {+,-} vasemmalta oikealle... – PetteriP (*)
13:23 » ... Nyt odotusarvo E on vastaava ja ajattelen sen asettuvan kutakuinkin väliin 3.0 ja 3.04. mutta pienin poikkeuksin. Eli. 1. E(...) on aina ...:n odotusarvo. 2. EX^s = E(X^s). 3. Eg(X) = E(g(X)) (eli muunnoksen odotusarvo, kun g:tä ei ole korvattu _lausekkeella_. ... – PetteriP (*)
13:24 » ... 4. EXYZW = E(XYZW) eli tulotkin menevät samaan, mutta tämä on jo hämmentävämpää, joten usein merkitsen sulkeet. 5. E sum_i X_i = E(sum_i X_i) (eli summaoperaattori on vahvempi eli en aio jatkossakaan kirjoittaa sulkeita sen ympärille :), mutta 6. EX + Y = (EX) + Y (eli yhteenlasku on silti heikompi operaatio)... – PetteriP (*)
13:24 » ... Edelleen 7. E1/X on niin hämmentävä (mutta käytännössä harvinainen), että merkitsen aina sulkeet siihen. Yhdistelemällä näitä havaitaan, että esimerkiksi EX^2g(W)Y^3+2 = (E(X^2*g(W)*Y^3))+2. – PetteriP (*)
13:25 » ... Eli yhteenvetona: merkitsen sulkeet näkyviin jos hiemankaan epäilen, että epäselvyyttä on, mutta potenssit ja muunnokset ja summaoperaattorit ja tulo-operaattorit ovat aina vahvempia. – PetteriP (*)
13:31 » 11:21: tuo on juuri mitä ajan takaa :) Ymmärrämmehän myös, että Da = 0 (lukemalla vakion derivaatta on nolla) ja tämä vaatii myöskin vakion tulkitsemisen vakiofunktiona. Kurssilla luentokalvoissa olen erityisesti nostanut näkyviin tuon Ea:n merkityksen (eli reaaliluku a tulkitaan vakiosatunnaismuuttujana ω ↦ a). Ja tuo "Sulut ovat joskus välttämättömiä, toisinaan niitä voi läiskiä pelkästään väärinymmärrysten riskin vähentämiseksi." on juuri se mitä tarkoitan :) – PetteriP (*)
13:35 » ... soveltamani laiskuusperiaate lisäksi vaatii turhien sulkeiden jättämistä pois :) Mitä vähemmän joutuu sulkeita kirjoittamaan, sen vähemmän tekee virheitä sulkeiden kanssa :) Lisäksi se korostaa E:n lineaarisuutta. – PetteriP (*)
17:48 » Tehtävä 2. Onko tehtävänannossa tarkoitettu. E(X^4) vai (EX)^4 ?jälkimmäinen vaikuttaisi ainakin olevan helpompi soveltaa Jensenin ey:hyn.
17:54 » 17:48: Voit lukea nuo vaikkapa muodossa (EX^4)^(-1) ja E(X^(-4)). Tai: 1/EX^4 on siis sama kuin 1/(E(X^4)).
18:11 » (...ja jos tämä tuottaa tuskaa Jensenin ey:tä sovellettaessa, kannattaa ehkä miettiä, voitko valita X:n sijaan satunnaismuuttujan Y ja funktion g jotenkin toisin kuin niin että Y=X^1 ja g(y)=y^(-4). :))
19:01 » 17:48: kuten 17:54 sanoi, tehtävänannon EX^4 tarkoittaa E(X^4):ää. Tuota on kysyttä alla ja vastasin siihen "pitkän kaavan mukaan" :) – PetteriP (*)
19:04 » ... ja kuten 18:11 mainitsikin, aina voi merkitä muunnosia muilla sm:lla eli vaikka Z = X^4. Mitä silloin E(1/X^4) tarkottaisi ja mitä 1/EX^4 sm:n Z avulla. – PetteriP (*)

Tehtävä 3

17:03 » Viikon 7 T3 sain epäyhtälön nokan väärinpäin.

17:06 » 17:03: jos jäät tai kerrot epäyhtälö molemmin puolin jollain luvulla tyyppiä a-c tai a-b, kannattaa miettiä sen merkkiä huolella ja muistaa, mitä negatiiviluvulla kertominen tekee nokalle :)

17:07 » Onko tunnettua, että kahden konveksin yhtälön yhdiste on konveksi?

17:08 » 17:06 -1 kertominen tuotti sen minulle.

17:29 » 17:03: kuten 17:06 mainitsikin luultavasti jossain on negatiivisella luvulla kertomista tai jakamista. – PetteriP (*)

17:50 » 17:07: Mikä on konveksi yhtälö? :)

17:54 » ...minusta siis voidaan noin yleisesti puhua a) funktioista, jotka voi olla konvekseja, konkaaveja, molempia tai ei kumpiakaan, tai b) joukoista, jotka voi olla konvekseja tai ei-konvekseja. (Nää on sukulais- muttei samoja käsitteitä.) "Konveksien yhtälöiden yhdiste" ei heti mulle aukea mitenkään yksikäsitteisesti. Kahden konveksin funktion yhdiste on konveksi, jos ulkofunktio on ei-vähenevä.

17:57 » 17:07: hups... en huomannut heti kysymystäsi. Ymmärsin kysymyksesi siten että onko "kahden konveksin funktion yhdistetty kuvaus konveksi?" :) ja vastaus on... on tunnettua, ettei välttämättä ole. Kokeile lauseen 6.5. avulla näyttää, että $f(x) = -x^{1/3}$ on konveksi kun $x > 0$. Tiedämme että $g(x) = x^2$ on konveksi (mutta voit tarkistaa senkin lauseen 6.5. avulla). Määritellään $h(x) = g(f(x))$. Onko tämä funktio h konveksi kun $x > 0$? :) – PetteriP (*)

18:04 » 17:50tarkoitin funktio. Määritelmä 6.1

18:11 » 17:54: hyvä täydennys :) tuosta ulkofunktion kasvavuudesta (ei-vähenevyydestä) Alla olevassa esimerkissä tuo sisäfunktio kuvaa välin (0,∞) välille (-∞,0) ja tällä välillä ulkofunktio on vähenevä. – PetteriP (*)

18:13 » ... mutta tosiaankin. Jos ulkofunktio on vaikka e^x, niin silloin $e^{f(x)}$ on konveksi jokaisella konveksilla f, mutta jos ulkofunktio onkin e^{-x}, niin $e^{-f(x)}$ ei välttämättä ole konveksi vaikka f olisikin konveksi. – PetteriP (*)

18:15 » ... mieti vaikka normaalijakauman tiheysfunktiota :) – PetteriP (*)

20:24 » Olisiko vinkkejä tehtävään 3. Minulla on nyt g(b)(c-a) <= g(a)(c-b)+g(c)(b-a), mutta en pääse tästä maaliin. Vai olenko tehnyt jotain väärin?

20:34 » 20:24: Varmaan monia tapoja, mutta itse a) kerroin reippaasti vielä tuosta edelleen sulkuja auki ja b) pyörittelin vähän sitä epäyhtälöä, mihin tähdätään. (Minua helpotti kirjoittaa se muotoon, jossa ei esiinny jakolaskuja kummallakaan puolella.)

20:36 » ...ja toki kannattaa muistaa se tehtävänannossakin vihjattu seikka, että epäyhtälön molemmille puolille voi lisätä saman termin niin, että sen totuusarvo pysyy samana.

21:21 » Kiitos 20:34 t. 20:24

21:39 » 20:24: tuo mitä 20:34 varmasti auttoikin :) – PetteriP (*)

11:19 » g(λx+(λ-1)y)≤λg(x)+(1-λ)g(y) (a-c)g(b)≤(b-c)g(a)+(a-b)g(c) cg(a)-cg(b)-bg(a)≤ -bg(c)-ag(b) +ag(c) cg(a)-cg(b)+bg(b)-bg(a)≤bg(b) -bg(c)-ag(b)+ag(c) (c-b)(g(a)-g(b)) ≤(b-a)(g(b)-g(c)) Missä virhe

11:25 » Anteeksi rivitys ongelma. Onko tämä välivaihe oikein. (a-c)g(b)≤(b-c)g(a)+(a-b)g(c)

14:59 » 11:19: tuo 11:25 tarkennus on asian ydin :) Ensimmäisessä vaiheessa tarkoitit varmastikin g(λx+(1-λ)y) vasemmalla puolella, jolloin tuo seuraava välivaihe näyttäisi uskottavalta _JOS_ a-c > 0 tai a-c = 0. Mutta nyt a-c < 0. Miten negatiivisella luvulla kertominen muuttaa tilannetta :) ? – PetteriP (*)

15:37 » H7T3 piirtäminen ja "geometrinen tulkinta" ei ihan aukea. Onko tarkoitus piirtää "mielivaltainen" konveksi funktio ja näyttää kuvan perusteella, että tällöin $g(a)<g(b)<g(c)$ ja edelleen ko. erotusosamääriä koskeva ey jollain tavalla kuvan avulla?

15:38 » vai voisiko havainnollistaa jollain konveksilla funktiolla joissain pisteissä $a<b<c$, esim pisteissä $1<2<3$?

17:00 » Eiköhän voi valita haluamansa funktion, vaikka x^2, ja haluamansa pisteet. Sen sijaan on kyllä hyvä huomata, että konveksi funktio ei välttämättä suinkaan ole kasvava. :) Mieti vaikkapa funktiota x^2 pisteissä -3, -2 ja -1. Noiden pisteiden miettiminen tuolla funktiolla voikin olla ihan hyvä tapa

havainnollistaa sitä, mistä konveksisuudessa on kyse. :)
17:02 » ...ja kuvassa voinee miettiä esimerkiksi kuvaajan pisteiden välisiä yhdysjanoja (kuvaajakäyrän jänteitä) ja niitä vastaavien suorien kulmakertoimia.
17:10 » 15:37: geometrisella tulkinnalla tarkoitan mitä nuo jänteet ja erotusosamäärät tarkoittavat (kuten miten tangentin kulmakerroin ja derivaatta liittyvät toisiinsa). – PetteriP (*)
17:13 » ... "mielivaltaisen" konveksin funktion piirtäminen on aikas haastavaa :) joten kuvan tarkoitus on antaa "jonkinlainen visuaalinen selitys" pyydetylle ey:lle. (epäyhtälölle). Tämn puolestaan päättelet muokkaamalla "algebrallisesti" konveksin funktion määritelmän epäyhtälöä, kutakuinkin tehtävänannon vihjeiden mukaan :) – PetteriP (*)
17:16 » 15:38: tuo on hyvä ajatus :) mutta kannattaa katsoa myös 17:00 ja 17:02 mainitsemat hyvä huomio siitä, että konveksi ei välttämättä ole kasvava, kuten vaikka funtio f(x) = e^{-x}. Ja tosiaankin, tuo maininta kulmakertoimista on sen "geometrisen tulkinnan" pihvi :) – PetteriP (*)

Tehtävä 4

21:46 » H7T4: Onko tässä luvun 4 valinnalla muuta merkitystä kuin helpottaa laskun hahmottamista?
21:53 » Siis "helpottaa" = helpompaa huomata, että 1/4 + 3/4 = 1, 1/(3/4) = 4/3 ja 4/3*3 = 4 kuin että jos 1/p + 1/q = 1, niin q = p/(p-1) ja (p-1)*q = p. Eli olenko missannut jonkin oleellisen oivalluksen, jos en keksinyt muuta käyttöä tuolle luvulle neljä? :)
22:08 » 21:46: eipä ole :) mutta kun yhdellä arvolla saa laskettua, voi helposti miettiä miten homma jatkuisi :) – PetteriP (*)
16:32 » Tehtävä 4: Hölderin epäyhtälön soveltamiseen vinkkejä? Ei tunnu luonnistuvan.
17:37 » 16:32: Tarkoitus on siis unohtaa hetkeksi vasemmalta puolelta E|X+Y|^(1+p). Yritä soveltaa Hölderin epäyhtälöä ensin termiin E(|X+Y|^3|X|) erikseen: tuo luku 3 antanee vihjeen siitä, miten "p" ja "q" on syytä valita. Jos saat näin kummallekin termille ylärajan, niin voit käyttää hyväksesi sitä, että jos a1 <= b1 ja a2 <= b2, niin a1+a2 <= b1+b2. (...)
17:38 » (...) Tämän jälkeen sinulla pitäisi olla mallia c <= a1+a2 <= b1+b2 oleva ketju. Transitiivisuuden nojalla voit tiputtaa välistä pois tuon a1+a2. Tämän jälkeen voit hyödyntää potenssin ja jakolaskun laskusääntöjä.
17:45 » 16:32: 17:3{7,8} antoiki jo hyviä neuvoja. Ja hyvin riittää olettaa, että kaikki odotusarvot ovat äärellisinä olemassa, jolloin kertominen ja jakaminen on määritelty mukavasti. :) – PetteriP (*)
17:50 » ... tuossa tulikin käytävällä hyvä kysymys: (tämän saa/kannattaa unohtaa, tätä ei tarvitse tehtävässä tarkastella :) Entä jos odotusarvot ovatkin äärettömiä, mitenkä sitten voi toimia :) Jos EX^4 tai EY^4 on ääretön, on ey korkeintaan muotoa ∞ ≤ ∞, joten on turvallista olettaa, että EX^4 sekä EY^4 < ∞. Kysymys koskikin että miten tehtävän yhdessä kohdassa voidaan tietää, että E|X+Y|^4 < ∞. Luonnostelin yhden tavan, johon työkalumme eivät riitä, mutta :) ... – PetteriP (*)
17:57 » ... konveksisuuden määritelmällä (tai Jensenin ey:llä :) voi näyttää, että (x/2+y/2)^4 ≤ (x^4)/2 + (y^4)/2, joten (1/16) * E|X+Y|^4 ≤ (1/2) * (EX^4 + EY^4) < ∞, kun EX^4 ja EY^4 < ∞... _MUTTA_ tämä on "yli" tehtävänannon eli ei huolta :) Tämä on siis vain tiedoksi kysyjälle (sekä muille jotka pohtivat asiaa) :) – PetteriP (*)
20:52 » Vinkkiä T4? en oikein pääse edes alkuun
20:59 » 20:52: kohdassa a) mieti ensin miksi jokaisella reaaliluvulla x ja y on voimassa |x+y|^4 ≤ |x + y|^3 (|x| + |y|). Mieti, kuinka tästä saadaan vastaava ey satunnaismuuttujille X ja Y ja miten a) kohta seuraa tästä. – PetteriP (*)
21:03 » ... b) kohtaan tuli tuossa alla hyviä vihjeitä (kysyjänä 16:32, tästä n. 4 minun vastausrykelmää alaspäin). Siitä ylöspäin varsinkin vinkit 17:37 ja 17:38 ovat mainioita. Ja äärettömyyskysymykset saat luvalla unohtaa :) – PetteriP (*)
15:35 » Miten H7T4 a-kohtaa pitäisi lähestyä?

15:43 » En huomannutkaan, että siihen oli tuossa vähän alempana jo vastattu.
15:44 » T4b jensen
19:12 » 15:44: tuo Jensenin käyttö T4b:ssä antaa hieman lisäkuvaa (varsinkin äärettömyys/äärellisyyskysymyksiin) esim. sillä voi päätellä, että aina on voimassa $(E |X+Y|^4)^{1/4} \le 2 (E|X|^4)^{1/4} + (E|Y|^4)^{1/4})$ riippumatta onko nuo odotusarvot äärellisiä vai äärettömiä :), mutta kuinka tuo kerroin 2 vaihdetaan luvuksi 1 kannattaa tehdä tehtävänannon ohjeiden mukaan (olettaen että kaikki on "äärellistä ja mukavaa"). – PetteriP (*)
19:31 » 19:12 T4 tehtävän annosta puuttuu tuo ^(1/4)
20:04 » 19:31: ??? mitä tarkoitat... a) kohdasta se ei puutu (se on tarkoituksella muodossa $E |X+Y|^4 \le \dots$:) ja b) kohdassa se on implisiittisesti mukana (sillä se on osa tuota Minkowskin ey:tä). – PetteriP (*)
20:06 » ... se mitä alla 19:12 kirjoitin tarkoitti, että tuolla aiemmin mainittu Jensenin ey antaa hieman heikomman tiedon, kuin mitä tehtävän b)-kohdassa pyydetään (joten siitä ei tarvitse varsinaisesti välittää :) – PetteriP (*)
20:28 » Jos joku haluaa todistaa Minkowskin epäyhtälön, niin tässä vinkit: 1) Kolmiöepäyhtälöllä vasen puoli palasiksi, 2) Hölderillä kullekin palaselle yläraja, 3) Vie summa oikeaan muotoon ja käytä binomiyhtälöä.
20:29 » Kirjotin vahingossa väärään kenttään ja loin tuohon ylös ilmoituksen tjsp. Sori. t. 20:28

Tehtävä 5

14:47 » Onpas hankala tämä tehtävä 5
15:01 » 14:47: se on hieman hankalahko :) mikä kohdista on a), b) vai c) on hankalin? – PetteriP (*)
15:09 » Jo a-kohta tuottaa vaikeuksia
15:36 » 15:09: Ajattele vaikka aluksi, että $X \ge 0$. Tällöin vasemmalla puolella on $E |Xe^{tX}|$ (ja koko odotusarvo neliöön korotettuna, mutta voit vaikka ottaa neliäjuuret ey:stä ensin). Yritä sitten keksiä sellaiset satunnaismuuttujat Y ja Z, että 1) $|YZ| = |Xe^{tX}|$, ja 2) joilla Cauchyn–Schwarzin $E | YZ | \le (EY^2 EZ^2)^{1/2}$ antaa pyydetyn ey:n. Sen jälkeen voi luentojen lausetta 4.4. (luvusta 4) käyttämällä luopua tuosta $X \ge 0$ oletuksesta. – PetteriP (*)
15:37 » Kas, olin just tulossa ihmettelemään vitostehtävää ja täällähän oli heti vinkkiä tarjolla.
15:39 » ... myös tuon $| t | < h$ voi alkuun unohtaa ja olettaa että MEF M(t) on ihan rehellisesti äärellinen kaikilla t. – PetteriP (*)
15:39 » 15:37: :) – PetteriP (*)

Tehtävä 6

19:02 » Onko tehtävässä 6 jäänyt funktion $g(t)=e^{-ta}M(t)$ alaindeksi X uupumaan, eli pitäisikö olla $g(t)=e^{-ta}M_X(t)$
20:44 » 19:02: kyllä. :) Siinä pitäisi olla tosiaankin $g(t) = e^{-ta} M_X(t)$. Onneksi kyseessä on aika harmiton pianovirhe tällä kertaa. :) – PetteriP (*)
22:32 » T6: olipas vain hankalia raja-arvoja mielestäni. Nyt en ole kuitenkaan varma, että mitä mielekästä lause 6.9 voi antaa tehtävän tilanteessa (a=8), ellei sitten mielekäs juttu ole se, että tiedetään mikä on mahdotonta ja mikä varma tapahtuma? Onhan se tieto tämäkin, mikäli nyt oikein olen nuo raja-arvot laskenut ja tehtävästä jotain ymmärrän. Tuntuu kuitenkin, että aika "mekaaninen maku" jäi tästä suuhun, en siis ymmärrä täysin mistä tässä tehtävässä on kyse :)
22:33 » Tosin tehtävää 5 en ole vielä tehnyt, joten valaiseekohan se lisää kun siinä tuota samaa lausetta käsitellään.
22:41 » 22:32: Tarkoitatko tapausta $a < 8$? Pelkkä raja-arvon ääretöntä lähestyttäessä tarkastelu ei tosiaan tuota siinä lisäinformaatiota. Minusta tehtävä nimenomaan havainnollistaa, että joskus jo melko

yksinkertaisella raja-arvotarkastelulla päästään pitkälle, toisinaan tarvitaan lisätyökaluja.
22:52 » (...) Lause 6.9 koskee yleensä infimumin etsimistä, joka on siis vähän laajempi kysymys kuin pelkkä raja-arvotarkastelu. Lähinnä funktion ominaisuudet takaavat sen, että jos raja-arvo on "kiva", siitä on välitöntä hyötyä.
22:54 » (...) Välillä 4 < a < 8 saa myös mef-ey:llä "lisäinformaatiota" tn:stä X >= a. Lähellä odotusarvoa näissä on tosin tarkkaan tn:een verrattuna paljon ilmaa, häntää lähestyttäessä vähemmän. Vastaava pätee välillä 0 < a < 4 tn:lle X <= a. Mutta itse en nopsaan keksinyt, miten noilla väleillä kysymyksen saisi ratkaistua "helposti" (nopeasti). (Ja tätä ei tosiaan tehtävässä kysytäkään - vain sitä, mitä voit päätellä raja-arvoista. Myös "ei mitään" on validi vastaus. :))
09:58 » 22:32: luulen myös, kuten 22:41 mainitsi, että tarkoitat tapausta a < 8. Silloin kovin paljoa ei suoraan voi päätellä, joten hieman lisätarkastelua tarvitaan tällöin infin käsittelyyn. Kannattaa lukea, mitä 22:52 ja 22:54 sanoi ja myös se, "ei mitään" voi olla hyvä vastaus :) – PetteriP (*)
17:45 » Vinkkejä, miten saan laskettua 6. tehtävän raja-arvot?
19:14 » 17:45: Yleensä sanotaan, että eksponenttifunktiolla e^x on se ominaisuus, että se kasvaa nopeammin kuin mikään potenssifunktio x^n millä tahansa n. Toisin sanoen, kun x kasvaa rajatta, e^x/x^n kasvaa rajatta, ja vastaavasti x^n/e^x pienenee rajatta. Riittääkös tämä tieto vai liittyikö ongelmasi siihen, miten tätä tietoa hyödyntää laskussa?
19:15 » ...hups, siis "pienenee rajatta" piti tietysti olla "lähestyy nollaa, kun x kasvaa rajatta" :)
21:37 » 17:45: kuten 19:14 sanoi, niin raja-arvon lineaarisuuden sekä ajatuksen että e^{-x} * x^n -> 0 kun x lähestyy ääretöntä sekä e^x / x^n kasvaa rajatta asian pitäisi selvitä. – PetteriP (*)
21:45 » ... yleensä hyvä tapa on "sieventää" raja-arvoja askel askeleelta ja miettimällä, mitkä termit ovat merkityksellisimpiä: esim. raja-arvo lim_{x -> ∞} x^4 - 100000 x^2 näyttäisi ensi alkuun ∞ - ∞ tilanteelta, mutta x^4 kasvaa nopeammin kuin x^2, joten "suoraan" havaitaan, että kysymys onkin sama kuin lim_{x -> ∞} x^4 = ∞. Tämän voi perustellakin nopeasti, sillä x^4 - 100000 x^2 = x^4 * (1 - 100000 x^{-2}) ja jälkimmäinen termi (1 - 100000 x^{-2}) -> 1 rajalla. – PetteriP (*)
21:47 » ... tehtävässä esiintyy hieman samantyylinen päättely viivan päällä, joten samalla periaatteella kaikki "pienemmät" termit voi alkuun "unohtaa" viivan päältä :) – PetteriP (*)

Muut asiat

20:39 » Luentomonisteessa lauseen 6.9 todetaan pätevän "kaikilla a", luentokalvoissa esitetään rajaus "jokaisella a > 0". Mihin tämä jälkimmäinen rajaus liittyy? Monisteen todistuksessa ei minusta tarvita a:n positiivisuutta a) tapahtumien ekvivalenssin päättelemisessä (P:tä sovelletaan identtisiin tapahtumiin) tai b) Markovin soveltamisessa, koska e^(ta) > 0, vaikka a olisi < 0.
21:48 » 20:39: tuo kalvojen rajaus on kopypaste-virhe... :-/ Kiitos että huomasit :) – PetteriP (*)

17:18 » H7T1: Melko kauaksi tehtävänannosta menevä pohdinta: yritin miettiä, miten saisi itselleen havainnollistettua, miten erilaisia kysymyksenasettelua vastaavat, taustalla olevat jakaumat voisivat olla (esim. kuinka huipukas, kuinka vino jne.). (...)
17:18 » (...) Sain betabinomijakauman ptnf:ää hyväksikäyttämällä aika havainnollisia esimerkkejä vinoudesta (kaikki luvut väliltä 6-12 tai vastaavasti 2-8, missä luvulla 6 tai 8 on huomattavan paljon "massaa" niin, että luvut toteuttavat annetut keskiarvo- ja varianssiehdot), mutta (...)
17:19 » (...) löytyisikö jokin esimerkki jostain erittäin paksuhäntäisestä jakaumasta, joka kuitenkin toteuttaisi nuo parametrit?
17:21 » Ja vielä: voiko toisaalta ehkä ajatella, että Tsebysovin epäyhtälön yksi "geometrinen" tulkinta on juuri se, että se rajoittaa sitä, kuinka paksuhäntäinen jakauma voi _enimmillään_ olla?
17:47 » 17:00 hei kiitos tuhannesti, nyt uskoisin että ymmärrän mistä on kyse :)
18:14 » 17:18: ok :) niin kauan, kuin puhutaan _kokonaisluvuista_ ja tehtävänannon X:stä, niin tieto, että neliöiden keskiarvo on 50 (eli tieto 2. momentista -> varianssista) takaa että valtavan suuria

kokonaislukuja ei voi esiintyä... – PetteriP (*)
18:26 » ... voidaan päätellä, että mikään luvuista ei voi olla suurempia kuin 20^{1/2} * 10000 (joka on noin 14142). Helppouden vuoksi, esitän, miksi 20000 ei voi olla yksi luvuista. Jos mukana olisi yksikin 20000, niin neliöiden summa olisi vähintään (2*10^4)^2 = 4*10^8, joten jakamalla tämä 4000000:lla saadaan 4*10^8/(4*10^6) = 10^2 = 100 > 50, eli n_{20 000} = 0 (välttämättä) :) ... – PetteriP (*)
18:31 » ...niin, ja paksuhäntäisimmän mahdollisen _symmetrisen_ jakauman taitaisi saada vain määrittelemällä pistetodennäköisyydet Tsebysovin ey:n avulla? Lähdin itse (en kyllä tiedä miksi :)) lähestymään kysymystä sitä kautta, millä "tunnetulla" jakaumalla voisi olla annetut odotusarvo ja varianssi.
18:37 » ... On tosiaankin hyvä huomataan, että jos X:llä on varianssi olemassaan, niin Y = (X-EX)/(var X)^{1/2}:llä olisi EY = 0 ja var Y = 1, joten sm:llä Z = a* (Y + m) olisi annetut odotusarvo EZ = m ja varianssi a^2 :) eli 1) minkä tahansa jakauman voi sovittaa, jos kokonaisluvuista ei tarvitse pitää kiinni... – PetteriP (*)
18:48 » ... 2) ja sitten siirtymällä jatkuviin jakaumiin voitaisiin päästä lähelle Tsebysevin tarjoaamaa paksuutta tf:lle f_{Y}(y) = c*y^{-3} 1{y > 1}, sillä tällöin P(Y > y) = c/2 * y^{-2} kunhan y > 1... Tämä ei tosin _ihan_ kelpaa, sillä sm:llä Y ei ole äärellistä varianssia! Mutta esim. mikä tahansa f_{Z}(z) = d*z^{-3-a} 1{z > 1} kun a > 0 kävisi, sillä määrittelemällä tämä symmetriseksi ja valitsemalla d sopivasti olisi tällä EZ = 0 ja var Z = 1. – PetteriP (*)
18:53 » 17:21: eli voi hyvin ajatella, että Tsebysev rajoittaa sitä, kuinka paksuhäntäinen jakauma voi enimmillään olla, eikä jakauman tyypillä (diskreeetti, jatkuva, jotain muuta) ole juuri merkitystä, sillä esim. allaoleva jatkuva jakauma Z:lle voidaan "diskeretisoida" korvaamalla se ptnf:llä f_Z(k) = d * | k |^{-3-a} * 1{k ≠ 0}. – PetteriP (*)
21:05 » 17:21: ... sait minut pohtimaan tuota tehtävää 1 ja en voinut olla etsimästä ratkaisua :) Kun palataan tehtävänannon tyyppiseen tehtävään missä käsitellään kokonaislukuja ja oletetaan hetkeksi, että EX = 0 ja var X = 1, niin huomataan, että symmetrisiä jakaumia on helppo löytää (eli vinous = 0), mutta vinojen löytäminen on työläämpää, sillä kokonaislukuja ei voi "jakaa osiin" mielivaltaisesti. – PetteriP (*)
21:05 » ... ... Mutta vinous voi olla varsin suuri: löytyy sellainen X, jolle P(X = k) = n_k/4000000, EX = 0, var X = 1 ja EX^3 (eli tässä tapauksessa vinous) = 397522449/200000 (= n. 1987.612245). Kuten alla voidaan päätellä, että suurin mahdollinen vinous ei voi ylittää 2000:tta, joten varsin vinoja jakaumia voi olla. – PetteriP (*)
21:08 » ... tässä esimerkissä X:n arvojoukkoon kuuluu 7 lukua, joista suurin on 1996 ja pienin -118. Lukua 0 on eniten ja sitten lukua -1. – PetteriP (*)
23:11 » Petteri: ok, kiitos! :) Musta juuri tuo oli tässä kiinnostava pohdittava kysymys, että miten vähän Tsebysovin ey kertoo noiden mahdollisten ääriarvojen suuruusluokasta, kun n on iso, vaikka varianssi on pieni. Erit. verrattuna siihen, mikä on eka intuitio sen jälkeen, kun näkee, miten paljon epäyhtälö kertoo kahden simppelin tunnusluvun avulla massan keskittymisestä ex:n pieneen ystöön.
08:18 » 23:11: kyllä, nämä ovat ehdottomasti pohdinnan arvoisia asioita :) Tällaiset esimerkit kertovat, kuinka paljon jakaumia (jopa sellaisia, mistä voidaan puhua :) on, sekä kuinka vähän (sekä paljon) _muutama_ tunnusluku voi lopulta niistä kertoa. Mainitsemalleni esimerkille Tsebysev kuitenkin kertoo, että P(X=1996) ≤ P(|X| ≥ 1996) ≤ 1996^{-2} = n. 2,510 * 10^{-7} kun tarkasti P(X=1996) = 1/4000000 = 2,5 * 10^{-7} eli paljon ei "pelivaraa" jää, mutta silti riittävästi. – PetteriP (*)
18:26 » konveksius vai konveksisuus? konveksiuuden, konveksiuden vai konveksisuuden? konveksilla vai konveksisella?
18:40 » Varminta lienee kirjoittaa konvehti ja toivoa, että lukija hämääntyy suklaannälästä niin paljon, että unohtaa koko asian. (Vakavasti, minusta luontevimmin kielen päälle sopivat "konveksi funktio, joukko, kombinaatio" jne., mutta "konveksisuustarkistin, -ehto" tai "funktion konveksisuudesta seuraa" jne.)
19:06 » 18:26: hyviä kysymyksiä. Itse kirjoittaisin "konveksisuus", "konveksisuuden" :) ja "komppaan"

18:40 lähestymistä. – PetteriP (*)
20:42 » Hups. Ompas tähän tullut keskustelua Laskuharjoitus 7:sta (ei olleet ihan helpot :), joten kokosin tähän mennessä olleet kurssisivulle ja yritin järjestää ne tehtävä kohtaisesti, jotta keskustelu on näkyvissä kaikille :) alkuosa oli jo vierinyt pois "näkyvistä". – PetteriP (*)
18:10 » Onko 5.12 luennot? Entä 6.12. laskarit?
19:01 » Tuskin ainakaan 6.12 laskareita on :)
20:02 » Onko tn-laskennassa mitään erityistä iloa erosta konveksien vs. vahvasti konveksien funktioiden välillä?
21:06 » 18:10: luennot on 5.12. sekä 7.12. mutta 6.12. ei ole laskareita, aivan kuten 19:01 sanoikin. – PetteriP (*)
21:09 » 20:02: on toki :) mutta siitä enemmän myöhemmin :) – PetteriP (*)