Laskuharjoitus 6

15:31 » hehe... Päädyin H6T3a)-kohdassa tasointegraaliin, jotka tulee kurssin toisella puoliskolla eteen? Ihan mukavastihan sen huipukkuuden noinkin sai laskettua, vaikka joutui kyllä aikalailla vääntämään. Sitten huomasin, että saahan sen myös ihan parilla rivillä ratkaistua Ilman suurempia jippoja. Tasointegraaliin päädyin muunnoksen ja lauseen 4.5 soveltamisen jälkeen jos jollain kiinnostaa :D
17:29 » 15:31: monella tapaa voi asioita laskea :) – PetteriP (*)

20:31 » En tiedä onko muita ihmetyttänyt, mutta pikaisen googletuksen ja kurssimatskun selailun jälkeen en löytänyt asiaan vastausta. Siis kysymys: Mistäs ihmeestä tasajakautuneen satunnaismuuttujan varianssin laskentakaavaan tupsahtaa jakajaksi tuo mystinen 12? En tiedä onko asiaa käsitelty luennoilla, sillä en pääse niille osallistumaan. En kuitenkaan keksinyt mitään loogista selitystä, vaikka hiukan koitin tuota itsekin miettiä. Ajattelin siis kysäistä täällä.
20:39 » Tehtävä 3: Eikö excess kurtosis viittaa juuri "standardinormaalijakauman huipukkuuden ylittävään huipukkuuteen" , jolloin se on jakaumalla N(0,1) nolla nyt saatavan arvon sijaan? Olenko ymmärtänyt väärin vai pitäisikö tuossa olla siis termin excess kurtosis tilalla pelkkä kurtosis?
21:27 » 20:31: helpoiten tuo mystinen 12 selviää seuraavasti: ajatellaan, että X ~ U(-1/2, 1/2). Tällöin EX = 0 ja var X = EX^2 (sillä EX = 0). Edelleen, koska nyt tf on symmetrinen, niin EX^2 = 2 int_0^{1/2} x^2 dx. Integroimalla tuo saadaan EX^2 = (2/3)*(1/2)^3 = 1/(3*4) =1/12... – PetteriP (*)
21:30 » ... Jos Y = (b-a)*X, niin miettimällä luvun 5.3.1. "Skaalaus ja siirto" mukaan havaitaan, että Y ~ U(-(b-a)/2,(b-a)/2). Siispä var Y = var ((b-a) X) = (b-a)^2 var X = (b-a)^2/12. Vielä siirtämällä Z = Y + (a+b)/2 saadaan tuo yleinen tilanne. – PetteriP (*)
21:35 » 20:39: no hups. Pitäisi olla pelkkä kurtosis... eli ei tarvitse vähentää 3:sta :) – PetteriP (*)

14:03 » Kiitos Petteri 21:27. Eihän se nyt sitten niin "mystinen" tuo 12 ollutkaan :)
15:52 » En oikein ymmärrä miten H6T4 taylorin potenssisarjasta saa pääteltyä momentit. Sain sarjaesityksen lauseen 4.9 avulla potenssisarjan muotoon ja laskettua momentit integroimalla, mutta miten sarjasta pystyisi päätelemään momentit? Taylorin polynomien avulla?
15:53 » ...mutta se kai johtaisi väkisinkin siihen, että ainakin ensimmäinen derivaatta M'(t) tulisi laskea auki ja päätellä sen avulla loput. Tuntuu aika työläältä kun pitää päätellä momentit EX^k , kun k=2,4,6,8
16:49 » 15:53-15:53: laitoin kurssisivulle juuri esimerkin potenssisarjoista ja momenttiemäfunktiosta. Laskitko odotusarvon Ee^{tX} käyttämällä TTL:ää (lausetta 4.5)? Kun t ei ole nolla, sait varmaankin kahden eksponenttifunktion (jaettuna t:llä) lineaarisen yhdisteen M(t):ksi... – PetteriP (*)
16:50 » ... nyt voit muodostaa kummallekin termille eksponenttifunktion Taylorin sarjan e^x = sum x^k / k! avulla potenssisarjan sum_k a_k t^{k-1} ja sum_k b_k t^{k-1}. Näiden summa on myös potenssisarja sum_k (a_k + b_k) t^{k-1}... – PetteriP (*)
16:53 » ... lauseen 4.9 mukaan M(t) = sum_k EX^k t^k / k! ja äskeisen laskun mukaan M(t) = sum_k (a_k + b_k) t^{k-1}. Täsä voi päätellä, että a_k + b_k = EX^{k-1}/(k-1)! kaikilla k = 1, 2, 3, 4, ... – PetteriP (*)
16:54 » ... mutta hieman haastavampi esimerkkilasku on kurssisivulla nyt :) auttaiskohan se eteenpäin? – PetteriP (*)
16:55 » ... tuo Taylorin sarja vihje viittasi lähinnä tuon eksponenttifunktion sarjakehitelmään. Tarkoitus ei siis ole derivoida kaikkea :) vaan välttää derivointia potenssisarjojen avulla :) – PetteriP (*)
21:48 » 16:49-16:55: Kiitoksia! Vinkit ohjasivat oikeaan suuntaan ja vihdoin tehtävä ratkesi.

Ratkaisuun päädyin ehkä hiukan eri reittiä, sillä itselläni oli viimeisessä vaiheessa (eli yhtälö ratkaistaessa) t:n ja EX:n potenssina k, ei (k-1). Oleellisesti se ei kuitenkaan eroa, vaikka olisi päättänyt muokata lauseen 4.9 antamaa sarjakehitelmää sellaiseen muotoon, että potensseina olisi ollut (k-1). Ehkä kurssin vaikein tehtävä tähän mennessä :)
21:55 » 21:48: juu, itsekin yleensä muokkaan kaiken siten, että t:n potenssi on nimenomaan k (vaihtamalla summausmuuttujaa) mutta tuohon alle tuli nyt tuolla tavoin :) mutta hyvä että oli haastettakin jo :) – PetteriP (*)
20:49 » Mitä T6 sarjaesityksellä tarkoitetaan?
21:42 » 20:49: tuolla tarkoitin seuraavaa: koska {X = Y} voidaan jakaa erillisiin tapahtumiin {X=Y=0}, {X=Y=1}, ... joten P(X=Y) = sum_{k=0}^∞ P(X=Y=k). Tämän tn:n P(X=Y=k) voi helposti laskea, mutta tuota sarjaa ei... – PetteriP (*)
21:44 » ... tehtävän eräs ajatus onkin valaista, kuinka hankalaa sarjaa voi arvioida kuitenkin varsin näppärästi riippumattomuuden avulla :) – PetteriP (*)
22:25 » 21:42-21:44: aivan, tämä selkeytti :)
22:41 » 22:25: mainiota :) – PetteriP (*)
11:11 » f(x)=0,kun x<0 f(x)=x/8, kun 0<=x<4 f(x)=1, kun 4<=x Onko tämä kertymäfunktio? Miten P(4) lasketaan?
11:16 » Onko se P(4)=P(4)-P(4-)? -Sama kuin edellinen
11:41 » 11:11.11:16: mikä tehtävä on kyseessä?
11:49 » Keksin itse tuon.
13:03 » 11:11--16: nähdäkseni on ja on. Olennaisempaa lienee miettiä, miksi näin on ja millä itsesi varmistat siitä, että on - mitä ominaisuuksia ftiolla esimerkiksi pitää olla, että se on jonkin jahkauman kf. Monisteen sivuilta 19 ja 20 voisi löytyä molempiin kysymyksiin välineitä.
18:04 » En ymmärrä ehkä ihan täysin tehtävän 6 ylä ja alarajoja todennäköisyydelle p=P(X=Y)=P(X=Y=k). Saan minimaalisen pienen välin laskemalla ensin ptn:t yhteen kun k = 0,1,2,3 ja lisäämällä tähän saatuun lukuun ptn:t kun k=4,5,6...., jolloin p=(X=Y=k) kuuluisi tuolle välille kaikilla k, sillä olen laskenut ensin alarajan ja sitten ylärajan tn:lle p. Mutta jos esim laskeen ptnf:n arvon pisteessä 1,, eli todennäköisyyden P(X=Y=1), niin se ei takuulla kuulu tuolle välille.
19:27 » 11:11: kuten 13:03 sanoikin, niin tuo on jonkin sm:n kf. Sanotaan sitä vaikka sitä satunnaismuuttujaa X:ksi. Tuolla P(4):llä tarkoittanet pistetn:ää P(X = 4). ... – PetteriP (*)
19:29 » ... tietoa ja tekniikoita miksi tuo f on jokin kf löytyy monisteen sivuilta 18-20 (sekä vastaavilta kohdilta luvun 2 kalvoista). Hyvin keksitty tehtävä :) – PetteriP (*)
19:35 » 18:04: tuo p on siis tn p = P(X=Y). Tuossa tehtävässä 6 huomataan aluksi että p = sum_{k=0}^∞ P(X = Y = k). Kukin näistä summattavista on ei-negatiivinen, joten p ≥ P(X = Y = 0) + ... + P(X=Y=3). Laskemalla nuo neljä lukua s = P(X = Y = 0) + ... + P(X=Y=3) yhteen saadaan siten alaraja(-arvio) tn:lle p, sillä p ≥ s. – PetteriP (*)
19:38 » ... vastaavasti p = s + P(X = Y ≥ 4), joten jos tn:lle P(X = Y ≥ 4) löydetään yläraja(-arvio), eli sanotaan vaikka P(X = Y ≥ 4) ≤ t, niin silloin p ≤ s + t eli löysimme yläraja-arvion tn:lle p (eli voimme sanoa että s ≤ p ≤ s + t. – PetteriP (*)
19:41 » ... en siis ole ihan varma kysymyksestäsi :) Oleellista on se että P(X = Y) ei ole sama asia kuin P(X=Y=k) mutta se on sama kuin P(X = Y = 0 tai X=Y=1 tai X=Y=2 tai ...) tai lyhyemmin P(X=Y=k _jollakin_ k=0,1,2,3,...) – PetteriP (*)
19:41 » ... ja nämä voidaan siten purkaa sarjaksi käyttämällä täysadditiivisuutta. Auttoikohan tämä? – PetteriP (*)