Laskuharjoitus 5

15:49 » Lauseessa 4.5 diskreetin sm:n tapauksessa puhutaan itseisestä suppenemisesta. Tuossa lauseessa molempien summien kohdalla alaindeksissä on pelkkä x, joka aiheuttaa hieman päänvaivaa minulle. Kun lasketaan lukua g(EX), niin summataan tietysti x "nollasta kolmoseen".

15:49 » ...Itseistä suppenemista olisi taas ymmärtääkseni aivan järjetöntä tarkastella minkään äärellisten summien kohdalla? Summa sum_{x=0}^\infty |g(x)|f_X(x) ei puolestaan suppene, vaan hajaantuu, jolloin vinkistä huolimatta ei lausetta 4.5 voi soveltaa? Mitähän en nyt ymmärrä oikein tai mitä olen ymmärtänyt väärin? :D

15:50 » Liittyy siis H5T1a)

16:49 » 15:49: Eikös tuo summa suppenee itseisesti vaikka summattaisi nollasta äärettömään, sillä 1a:ssa ptnf f_X(x) = 0 kun x ei kuulu joukkoon {0,1,2,3}. Eli kaikki paitsi neljä ekaa summattavaa ovat nollia. Ja eikös tuolla "äärellinen summa" -määritelmällä itseinen suppeneminen ole ihan hyvin määritelty käsite myös äärellisille summille. Toki kaikki äärelliset summat suppenevat itseisesti, eli ei olisi erityisen mielenkiintoinen käsite pelkille äärellisille summille. ... – Joonas

16:49 » ... Lauseessa 4.5 itseisen suppenemisen ehto onkin lähinnä äärettömiä summia varten, sillä analyysin kurssilla (Analyysi II / Sarjat) on opittu, että mikäli sarja ei suppene itseisesti, niin sarjan summa voi riippua summausjärjestyksestä. Eli itseisen suppenemisen ehto on takaamassa odotusarvon yksikäsitteisyyden. Näin ainakin minun käsittääkseni, Petteri korjannee, jos olen väärässä. – Joonas

16:54 » ... Itse asiassa materiaalin sivulla 53 määritelmän 4.1 yhteydessä tuo olikin mainittu. :-) – Joonas

17:37 » Joonas: kiitos vastauksesta. 16:49. Nyt olin huolimaton sillä ajattelin summaa nollasta äärettömään unohtaen , että "sillä 1a:ssa ptnf f_X(x) = 0 kun x ei kuulu joukkoon {0,1,2,3}", eli kuten kirjoititkin niin kyllähän tuo puheena ollut summa/sarja suppenee.

17:40 » Ja tarkoittaako siis tällä kurssilla summan alaindeksi x, sitä että summataan nollasta äärettömään?

17:41 » Yritin selailla kurssimateriaalia, mutta en llöytänyt mitään "sopimusta" tms. aiheesta. Ehkä vaan missasin sen?

18:25 » 17:40-17:41: kurssilla notaatio sum_x f(x) tarkoittaa samaa kuin sum_{x ∈ S} f(x), missä S = { x ; f(x) ≠ 0 } on korkeintaan numeroituvasti ääretön joukko. Tämä sum_x on siis vain "laiskempi tapa" ilmaista tämä. Eli S voisi olla esim joukko {0, 1, 7/4, 3,-1000,-300002, 2016}, joten se summaaminen ei välttämättä ole "nollasta äärettömään" ... – PetteriP (*)

18:28 » ... vaan nimenomaan yli niiden kohtien, missä summattavat ovat nollasta eriäviä. Esimerkiksi Lause 2.5. soveltaa jo tätä "notaatiota" :) – PetteriP (*)

18:31 » ... Kuten Joonas sanoikin, niin äärellisten summien ja äärettömien sarjojen kanssa tärkein "ero" on tuo että äärellisillä summilla kaikki keinot on käytössä automaattisesti (eli osittelulakeja, vaihdantalakeja jne.) käytössä. Lisäksi kaikki äärelliset summa ovat automaattisesti itseisesti suppenevia... – PetteriP (*)

18:35 » ... Tämän näkee vaikka seuraavasti: oletetaan, että lasketaan summaa a_1 + a_2 + ... + a_n, joista osa voi olla negatiivisia ja osa positiivisia. Tällöin kuitenkin b_j = | a_j | ovat kaikki ei-negatiivisia ja niistä voidaan valita suurin ja sanotaan että tämä suurin arvo on vaikka M. Tällöin |a_1| + ... + |a_n| = b_1 + b_2 + ... + b_n ≤ M + M + ... + M mikä on taatusti äärellinen... – PetteriP (*)

18:36 » ... Äärettömillä summilla tuo itseinen suppeneminen joudutaan vaatimaan, jotta esim. osittelulakeja ja laskujärjestyksen vaihtamista voitaisiin käyttää ilman rajoitusta... – PetteriP (*)

18:44 » ... Edelleen notataatio sum_x f(x) (tai sum_{x ∈ S} f(x)) ei määrää, missä järjestyksessä summaus tulisi suorittaa, joten tuollainen merkintä ei edes ole järkevä kuin itseisesti suppeneville sarjoille tai sarjoille, jonka kaikki summattavat ovat ei-negatiivisia. – PetteriP (*)

18:48 » 17:41: mutta et sinänsä missannut sopimusta materiaalista. Tajusin, että olen vain selittänyt tuon merkinnän luennoilla (ja en kirjoittanut sitä siis edes taululle). Teen tästä tarkemman lisäyksen

materiaaliinkin, kiitos hyvästä huomiosta :) – PetteriP (*)
18:57 » ... ja kuten Joonas 16:49 sanoikin, että kun mietitään odotusarvon _yleisintä_ muotoilua, niin tuo itseinen suppeneminen tarkoittaa satunnaismuuttujan integroituvuutta. Ja ilman tätä oletusta, odotusarvosta puhuminen on lähes mahdotonta: jos X = X^+ - X^- (missä X^+ = max(X,0) ja X^- = max(-X,0) kuten sivulla 58 monisteessa,) niin EX^+ ja EX^- voidaan aina määritellä (kun ∞ otetaan mukaan mahdolliseksi arvoksi)... – PetteriP (*)
18:59 » ... mutta jos sekä EX^+ = EX^- = ∞, niin X:n odotusarvoa ei voi millään tavalla määritellä. Satunnaismuuttujan integroituvuus (eli tuo itseinen suppeneminen / integroituminen) taas tarkoittaa oletusta EX^+ < ∞ ja EX^- < ∞, jolloin EX voidaan määrätä yksikäsitteisesti erotuksena EX^+ - EX^-. – PetteriP (*)
19:46 » Petteri: Kiitos kattavasta vastauksesta. En ole tosiaan luennoille päässyt, joten olen itse aina päätellyt summausmerkinnän sum_x asiayhteydestä :) Tämä kuitenkin selkeytti asiaa huomattavasti!
20:14 » 19:46: hienoa :) muutamia samantyyppisiä "laiskan henkilön merkintöjä" tulen kurssilla käyttämään (kantavana ajatuksena on: mitä vähemmän joutuu kirjoittamaan sen vähemmän a) rasittaa lihaksia, b) rasittaa päätä ja c) _kykenee_ tekemään painovirheitä). Yritän jatkossa tarkistaa, että niistä tulee kurssisivullekin tietoa :D mutta kysymällä merkinnät selviää :) – PetteriP (*)
22:50 » höhö.. loistavat perustelut. Erityisesti a)-kohta :)
09:55 » 22:50: "laiskuus" onkin mielestäni matematiikan ja monen muun siihen liittyvän alan kantavia perusperiaatteita :) ja tämä varmasti tulee kurssin aikana myös näkyville ;) – PetteriP (*)
00:10 » H5/T5b: En aivan hahmota, miten vihjettä pitäisi tässä hyödyntää. Muistelen, että luennolla käsiteltiin juuri tällaista ideaa, mutta jotenkin silloin niin selvältä vaikuttanut tapa hahmottaa kysymystä ei nyt sitten jäänytkään mieleen... :)
00:12 » ...ratkaisin tehtävän ns. brute forcella integroimalla \int_a^b x^3 1/(b-a) dx ja iskemällä tästä saatavan nätin lausekkeen kolmannen keskusmomentin kaavan, jolloin saadaan aika helposti, hmm, mukavan siisti tulos yleiseen tasajakaumatapaukseen. Mutta tätä ei varmaankaan haettu tässä takaa? :)
08:34 » ...vielä jatkoksi: sain kyllä lineaarisuutta hyödyntämällä X:n keskusmomentille lausekkeen Y = U(-1, 1):n muunnoksen avulla, missä tarvittavat Y:n momentit oli helppoa joko suoraan nähdä tai laskea. Siitä päätyy sitten toki samaan lopputulokseen. Tämä lasku ei kuitenkaan ollut minusta olennaisesti erilainen tai suoraviivaisempi kuin suora integrointi. Oliko tarkoituskaan olla?
12:04 » 00:10-00:12 ja 08:34: tuossa integroiminen suoraan on varsin helppoa eli "brute force" toimii hyvin. Hankalammassa tapauksessa tilanne olisi ollut helposti toinen ja vihje antaa mahdollisuuden yrittää soveltamista tähänkin suuntaan. Jotta tehtävä ei olisi "liian" kikkakolmonen, niin suoralle laskullekin pitää jättää mahdollisuus :) – PetteriP (*)
12:09 » Ok! Mutta siis mikään ei laskussa ole pielessä, jos molemmilla tavoilla pitää laskea (tai noh, sievennellä) vielä vähän sen kolmannen origomomentin johtamisen jälkeen, jotta kolmannen keskusmomentin näkee nollaksi? Jotenkin tulkitsin vihjettä ensin niin, että tämän johtopäätöksen näkisi "suoraan" (muutenkin kuin kuvasta). :-)
13:22 » 12:09: ei toki ole pielessä :) tässä vaiheessa vielä joutuu vähän laskemaankin :) Tämän johtopäätöksen "näkee" mahdollisesti "suoraan" jatkossa, sillä jos sm:llä X on symmetrinen jakauma origon suhteen (eli f(x) = f(-x) kaikilla x kun X diskreetti tai jatkuva, tai yleisesti F(x) = 1 - F(-x) kaikilla x) niin Eg(X) = 0 kaikilla _parittomilla_ funktioilla g (eli funktioilla joilla g(x) = -g(-x) kaikilla x), kunhan g(X) on integroituva eli E | g(X) | on äärellinen. – PetteriP (*)
21:10 » Kävinpäs "vasiten" wikipediassa lukemassa momenteista. Sivuilla kerrotaan, että toinen keskusmomentti on varianssi. Näinhän meidänkin moniste sanoo. Mutta siellä on myös tieto "....jota kutsutaan kolmanneksi keskusmomentiksi eli vinoudeksi." Eikös tämä mene metsään? H5T5 kerrotaan kuinka vinous määritellään. Tässä kolmas keskusmomentti jaetaan vielä keskihajonnan "kuutiolla", eli wikipedia on nyt vähän hakoteillä, vai olenko minä?
21:53 » 21:10: hyvä että olemme varianssista yhtä mieltä :) Vinouksia on monenlaisia, mutta tuo suomenkielisen wikipedian momentti sivun "tieto" näyttää hieman käännösvirheeltä, sillä

englanninkielisellä sivulla lukee "The normalised third central moment is called the skewness", tosin se oli johdannossa ehkä hieman epäselvästi mainittu... – PetteriP (*)
22:02 » Suomenkielinen Wikipedia on usein oikeilla jäljillä, mutta usein asia kannattaa varmistaa englanninkielisestä Wikipediasta (kuten tässä tapauksessa https://en.m.wikipedia.org/wiki/Skewness, josta kohdasta Definition löytyy sama määritelmä kuin tehtävästä 5) Mitä olen oppinut, suomenkielisessä Wikipediassa on tilastotieteeseen liittyvissä artikkeleissa usein pieniä asiavirheitä ja näiden bongaamisesta on ollut jopa harjoitustehtäviä eräillä tilastotieteen kursseilla :) – Aku
22:02 » ... tuossa tärkeä erottava sana "normalised" on juuri se, mikä erottaa nämä. Tuo normeeraaminen tuottaa sen σ^3:lla jakamisen. – PetteriP (*)
22:05 » 22:02: Aku. Tuohan oli aika vinha tieto noista "bongaustehtävistä" :) tuota en tiennytkään :) – PetteriP (*)
22:10 » ... ja aivan kuin Aku sanoi, tuo "Skewness" sivun määritelmä on se mitä tehtävässä 5 käytettiin. Sivulla lukee myös "It is sometimes referred to as Pearson's moment coefficient of skewness,[5] or simply the moment coefficient of skewness,[4] but should not be confused with Pearson's other skewness statistics (see below)." – PetteriP (*)
22:12 » ... mutta ei noilla muilla määritelmilläkään ei tuota suomenkielisen sivun (käännös)epätarkkuutta voi selittää :) – PetteriP (*)
22:13 » Kiitokset Aku ja Petteri vastauksista! Onneks presemo on anonyymi, joten vältyn lynkkaamiselta kun alkaa kurssin toka osiossa tulla näitä "etsi virhe wikipediasta"-tehtäviä tämän innoittamana :D
13:57 » Saako lisäpisteitä jos käy korjaamassa wikipediaa? : D
07:03 » 22:13: eipä kestä :) ja 13:57: hmmm...................... :) tosin noista pisteistä et varmaankaan puhunut :D – PetteriP (*)
07:37 » Hypoteesi: jos käy täydentämässä suomenkielistä Wikipediaa ja miettii huolellisesti, mitä oikeastaan on kirjoittamassa ja miksi (ja mitä lukijan pitäisi tästä ymmärtää), niin on sellainenkin varsin todellinen vaara olemassa, että tulee ymmärtäneeksi asian paremmin. Siitäkin on joskus saanut eräänlaisia lisäpisteitä kokeessa! :)
12:37 » Miten H5T4 cov-kohtaa tulisi lähestyä? Koen, että Y ja Z eivät ole riippumattomia, joka johtaa umpikujaan. Jos asiaa lähestyy cov(Y,Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z), miten tuo E(YZ) tulisi ratkaista?
12:39 » Vai pitääkö siinä soveltaa lausetta 4.8?
13:19 » 12:37-12:39: Koet oikein, etteivät Y ja Z ole riippumattomia. (Sitten kun on saanut tehtävän tehtyä, niin voi olla hyvä idea miettiä, että miten ei-riippumattomuuden pystyisi täsmällisesti perustelemaan.). Kovarianssin saa laskettua monella tavalla, molempien ehdotuksiesi pitäisi johtaa maaliin ja siis samaan lopputulokseen. (Voikin olla opettavaista yrittää laskea molemmilla tavoilla!) ... – Joonas
13:20 » ... Tuon E(YZ):n pitäisi saada laskettua, kunhan Y:n ja Z:n korvaa aluksi tehtävänannon summalausekkeilla, keksii tehdä jotain tulolle ja sitten soveltaa muutamaa muistamisenarvoista kurssin lausetta. Mutta vaihtoehtoisesti myös lauseen 4.8 avulla kovarianssin saa laskettua. Tapoja on monia! :-) – Joonas
15:04 » K5T4 Laske var(Y). Voinko jättää c=2016 huomioimatta ja laskea var(aX_1,bX_2)?
17:49 » ... Joonas neuvoikin mainioisti jo :) Ja varsinkin 13:20 huomautus että tapoja laskea on todellakin monia. Esim. jos sanotaan Y = 2016 + Y_1, niin E(YZ) = E(2016 Z + Y_1 Z) = 2016 EZ + E(Y_1 Z), joten YZ:n odotusarvon laskemiseen riittää laskea EZ ja E(Y_1 Z). Jatkamalla tätä kunnes jäljellä on vain sm:n X_1 ja X_2 erilaisia tuloja homma selviää :) – PetteriP (*)
17:54 » 15:04. Kun lasket var(Y):tä niin voit kuten edellisessä ajatella että Y = 2016 + Y_1, jolloin var(Y) = var(2016 + Y_1). Nyt lause 4.7 puree. Mutta hyvää harjoitusta on laskea suoraan var (2016 + Y_1) = E ((2016 + Y_1) - E(2016+Y_1))^2 = ... sillä mitä enemmän laskee, sen enemmän vähentää laskemista :) Mutta lyhyesti: voit :) – PetteriP (*)
16:30 » Olikos niin, että teekkari-induktio ei toimi kumulanttiemäfunktiolla (ainakaan yleisessä

tapauksessa)? Eli cgf:n kolmas derivaatta antaa vielä kolmannen keskusmomentin (tämän sain vahvistettua laskulla), mutta neljäs ja siitä ylöspäin eivät annakaan (nyt derivaattaan tulee termi (EX^2)^2)?
16:51 » 16:30: Näin näyttäisi olevan, englanninkielisen wikipedian Cumulant-artikkelissa (https://en.wikipedia.org/wiki/Cumulant) ainakin sanotaan: "The first cumulant is the expected value; the second and third cumulants are respectively the second and third central moments (the second central moment is the variance); but the higher cumulants are neither moments nor central moments, but rather more complicated polynomial functions of the moments." – Joonas
16:51 » 16:30: ... Mutta huomaathan, että eihän edes kumulanttiemäfunktion ensimmäinen derivaatta nollassa ole ensimmäinen keskusmomentti. :-) – Joonas
17:13 » Joo, tässä oli mielessä teekkari-induktio indeksoinnilla k=2, 3, ... :)
23:26 » 16:30 ja 17:13: juu ei :) siksi kyseisen "induktion" käyttö vaatiikin sekä hyvää onnea, pientä huolellisuutta että kovaa pokkaa :) Onnistumistodennäköisyyttä voi parantaa siten, että joku (vaikka minä) tekee induktion ihan kunnolla (vaikka sitten katseilta piilossa ;) – PetteriP (*)