Laskuharjoitus 3

15:38 » Saisiko kolmansien harjoitusten tehtäviin 4 ja 5 jotain vinkkejä? Tehtävässä 4 tuo Z:n kertymäfunktion ratkaiseminen hieman hämmentää ja tehtävässä 5 en oikein pääse alkuun...
12:18 » 15:38: tuossa 4:ssa $F(z) = P(Z \le z) = P((X-2)/(X+1) \le z)$. Tarkastellaan kuvausta $f(x) = (x-2)/(x+1)$ kun $x > 0$. Havaitaan että $a < f(x) < b$ joillakin $a < b$ (mieti mitkä a ja b ovat, piirrä vaikka f:n kuvaaja :) Näiden avulla voidaan suoraviivaisesti päätellä rajat $c < d$, joilla $F(z) = 1$ kun $z \ge d$ ja $F(z) = 0$, kun $z \le c$ (aivan kuten luennoilla useasti :). Tämän jälkeen riittää tarkastella mitä F(z) on kun $c < z < d$. – PetteriP (*)
12:24 » ... Edelleen jos $k > 0$ on jokin luku, niin $a \le b$ jos ja vain jos $ak \le bk$. Tätä voi käyttää pariin otteeseen yhdessä tietojen $X > 0$ ja $c < z < d$ kanssa. Eiköhän näillä F "ratkea" :) Ja toinen tapa on tarkistaa lauseen 2.12 oletukset :) eli miettiä mtkä A ja B tulevat kyseeseen jotta tuo äskeinen kuvaus f olisi diffeomorfismi A -> B sekä $P(X \in A) = 1$. Nyt huomaan, että olisi pitänyt nimetä se kuvaus g:ksi ettei f sotkeutuisi tf:n kanssa. – PetteriP (*)
12:34 » ... a) kohtaan määrää kertymäfunktio F. Tämän avulla voit vihjeen mukaan määrätä kvantiilifunktion. Loppuun tarvitsee vain soveltaa käänteisfunktiomenetelmää (katso monisteen sivu 33 tai luentokalvojen luku2 pdf:n sivu 77). – PetteriP (*)
12:43 » ... b) kohtaa voi lähestyä vaikka seuraavan esimerkin avulla. Tiedetään, että $P(U < 1/4) = 1/4$, $P(1/4 < U < 1/2) = 1/4$ ja $P(1/2 < U) = 1/2$. Jos $h(u) = 17$, kun $0 < u < 1/4$, $h(u) = -1002$, kun $1/4 < u < 1/2$ ja $h(u) = 0$ muuten, niin $Z = h(U) = 0$, 17 tai -1002 ja esim. $f_Z(17) = P(h(U) = 17) = P(0 < U < 1/4) = 1/4$. Muut Z:n ptnf:n arvot voidaan laskea vastaavasti. Nyt vain "keksit" samantyyppisen porrasfunktion b)-kohtaa varten. – PetteriP (*)

14:38 » Pitääkö kertymäfunktiolle saada aina jokin yläraja, jonka jälkeen funktion arvo on 1, vai riittääkö, että funktio lähestyy arvoa 1. Koskee kolmansien laskareiden tehtävän 4 funktiota Y = 1/sqrt(X)
15:14 » 14:38: Hyvä kysymys :) On tosiaankin olemassa sellaisia kertymäfunktioita joille $F(x) > 0$ kaikilla _reaaliluvuilla_ x ja myös kertymäfunktioita joille $F(x) < 1$ kaikilla _reaaliluvuilla_ x. Tyyppiesimerkki jälkimmäisestä on Exp(1)-jakauman kertymäfunktio F(x) = 1{x > 0} × (1 - e^{-x}). – PetteriP (*)
15:15 » ... Eli välttämättä ei löydy lukua sellaista x:ää jolle $F(x) = 1$ (saatikka sellaista x:ää jolle $F(x) = 0$). Riittää siis vallan mainiosti, että kf F(x) vain lähestyy arvoa 1, kun $x \to \infty$. Tämän ilmaisimme usein kurssin "lyhennysmerkinnällä" $F(\infty) = 1$. Tästä syystä kurssilla välien (a,b), ..., [a,b] päätepisteinä käy yleensä myös $a = -\infty$ sekä $b = \infty$., mitkä eivät siis ole varsinaisia _reaalilukuja_ :) – PetteriP (*)
15:17 » 13:47: eiköhän :) – PetteriP (*)
16:58 » Kolmosharkkojen kolmostehtävässä tulee vastauksen ptnf:n yhteen kohtaan että todennäköisyys on 1/6, kun sqrt(z+2)=-1, mikä on mahdotonta. Olenko mennyt väärään vai mikä tuossa mättää? Nythän pistetodennäköisyyksien summa jäisi lukuun 5/6
18:24 » 16:58: -1:lle pitäisi kuvauksessa kuvautua kaksi eri alkiota, siis tn on eräs summa. Ja todennäköisyys sille, että Z saa arvon -1, ei tosiaan ole 1/6. Jos tuo indikaattoriesitys tuntuu hankalalta, niin sehän ei ole oikeasti lainkaan erilainen kuin toinen tuttu tapa määrätä funktion lauseke paloittain: f_X(x) = { 1/6, kun x = -1, 0, 2, 3; 1/3, kun x = 1; 0, muulloin }. Auttaisikohan kirjoittaa sekä X:n että Z:n funktiot noin?
18:28 » ...tosin nyt kun luin uudestaan kysymyksesi, en ehkä aivan edes tajua, mitä olet laskemassa. :) Jos haluat kulkea tuohon suuntaan, niin yhtälön y = x^2 ratkaisuja x:n suhteen ovat x = plus/minus sqrt(y). Eli kyllä sieltä voi aivan hyvin tulla -1.
19:46 » 16:58: kuten 18:24 sanoikin, niin tuon indikaattoriesityksen voi lukea paloittain määrittelynä, esimerkiksi tavalla jota käytin esimerkkilaskussa (löytyy kurssisivulta). Kuten 18:28 jatkoi, niin P(X^2 = y) = P(X = sqrt(y) tai X = -sqrt(y)) = ... Tästä jatkaminen selvittänee ongelman :) – PetteriP (*)

08:21 » Kuuluuko prujusta lukea samat luvut kuin mitä luentokalvoissa on käsitelty?
10:58 » 08:21: opetusmonisteen luvut käsittelevät samaa asiaa kuin kalvot, joissa pyrin korostamaan pääkohtia sekä välillä täydentämään monistetta. Opetusmonisteessa on lisämateriaalia ja se täydentää kalvoilla olevaa asiaa. Osa asioista taas on pelkästään kalvoissa (tällä hetkellä). Eli molemmat sisältävät keskeisen sisällön ja täydentävät toisiaan :) – PetteriP (*)
13:08 » Voisko saada jotain jeesiä tän viikon tehtävien 5. ja 6. tehtäviin. Ei oikein pääse edes alkuun.
16:40 » 13:08: tuolla alempana vastasin kysyjälle 15:38 (vastaukseni olivat 12:34 ja 12:43) vinkkiä tehtävään 5. Tehtävään 6 on kaksi tapaa lähestyä. Tapa 1: kertymäfunktiomenetelmä ja Tapa 2: muuttujanvaihtotekniikka. Koska nyt g ei ole monotoninen (mutta paloittain kyllä), niin laitoin esimerkin kurssisivulle, kuinka tuollaista kysymystä voi lähestyä. – PetteriP (*)
18:46 » Diffeomorfismin määritelmä: Ehkä hölmö kysymys, mutta ei liene mitään estettä sille että A = B ?
18:51 » 18:46: Oikein arvelet, ei ole mitään estettä. :-) – Joonas
18:57 » Melkein ehdin jo (taas) vastata itselleni ettei tietysti ole :D Kiitos silti Joonas vastauksesta.
23:18 » Kiitos lisätystä esimerkistä!:)
11:18 » 23:18: eipä kestä :) Niitä on vieläkin aivan liian vähän, mutta eiköhän tilanne pikkuhiljaa parane. – PetteriP (*)
17:00 » Toimiiko viime kierroksen T3 lähestymistapa tämän viikon T2 a) kohtaan?
20:06 » 17:00: kyllä vain :) – PetteriP (*)
21:02 » vinkkiä T5 kf:n F johtamiseen?
21:10 » jaa eipäs mitään sittenkään :D t. 21:02
22:55 » mä tarvitsisin vinkkejä tuohon edelliseen eli T5 a) kertymäfunktion muodostamiseen, lauseen 2.6. avulla en onnistu.
23:14 » 22:55: tjaa-a. Eli tf f_X on paloittain määritelty, f_X(x) = 1/2, kun x ∈ (0,1), f_X(x) = 1/2 x^{-2}, kun x ≥ 1 ja f_X(x) = 0 muutoin. Lause 2.6 kertoo, että F_X(x) = int_{-∞}^x f_X(u) du. – PetteriP (*)
23:15 » ... Katsotaan esimerkiksi, mitä olisi F_X(2) = int_{-∞}^2 f_X(u) du. Väli (-∞,2) voidaan kirjoittaana yhdisteenä väleistä (-∞,0], (0,1) ja [1,2), joten int_{-∞}^2 ... = int_{-∞}^0 ... + int_0^1 ... + int_1^2 ... – PetteriP (*)
23:15 » ... Kukin näistä integraaleista voidaan laskea erikseen esim. int_{-∞}^0 f_X(u) du = int_{-∞}^0 0 du = 0. – PetteriP (*)
23:16 » ... Hankalin integroitava lienee väli int_1^2 (1/2 u^{-2}) du, mutta kun muistaa, että D x^a = a x^{a-1} oli a mikä luku hyvänsä, niin 1/2 u^{-2}:n antiderivaatta löytyy nopeasti :) – PetteriP (*)
23:19 » ... Sitten ei tarvikaan kuin korvata tuo F_X(2) yleisellä tapauksella F_X(x). Tapauksesta x = 2 havaitsee, että kannattanee miettiä erikseen tilanteet x ≤ 0, x ≥ 1 ja x on välillä (0,1), sillä kf F tulee olemaan paloittain määritelty. – PetteriP (*)
08:19 » Kiitos kiitos, ihan oikein olin tehtävää lähestynyt, mutta päädyin aina tilanteeseen, että saamani kf F ei ole jatkuva. Sitten huomasin, että olinkin integroinut jokaisen välin x:ään :)
08:49 » 08:19: hyvä että selvisi ja erityisen hienoa on, että tarkistit F:n jatkuvuuden :) Sellaisenkin lähestymisen tuommoisen paloittain määritellyn tf:n integrointiin voisi ottaa, että esim. tuo F_X(2) = F_X(2) - F_X(1) + F_X(1) = int_1^2 f(u)du + F_X(1). Jos on aiemmin jo määrännyt F_X(1):n niin sitten sen arvo vain lisäätään tuohon "loppupätkän" integraaliin. Ja samaa periaatetta voi toistaa kaikkien palojen kanssa. – PetteriP (*)
12:14 » F_x= 2x-1, kun 1/2<x<1 (T3 b-kohta)??
12:15 » Korjaan, T2 siis.
12:16 » Ja alfa vielä potenssiin, eli (2x-1)^alfa
12:31 » 12:16: vaikuttaisi uskottavalta :) – PetteriP (*)
12:31 » Kiitos :)
13:46 » Sain kolmosessa x= +-sqrt(Z+2), millä perusteella valitaan + tai -?

14:54 » 13:46, Petteri on tuolla aiemmin neuvonut tähän liittyen "Kuten 18:28 jatkoi, niin P(X^2 = y) = P(X = sqrt(y) tai X = -sqrt(y)) = ... Tästä jatkaminen selvittänee ongelman" Nythän olet tässä tilanteessa. Mieti millä z:n arvoilla saat ulos sellaisia lukuja, joiden tn on jotain muuta kuin nolla :)
14:55 » ..ja lisäksi muista tn:n additiivisuus kun tapahtumat ovat erillisiä
14:57 » ja vielä.. kumpaakaan noista ei pidä kokonaan hylätä. Tarvitset molempia kun lasket todennäköisyyksiä eri z:n arvoille
15:24 » Päätyisinkö samaan lopputulokseen, vaikka hylkäisin tuon -sqrt(z+2)?
15:41 » Et päätyisi :)
16:11 » 13:46: saitkin jo mainiota taustatukea :) – PetteriP (*)
16:21 » 15:24: kuten 15:41 sanoikin, et päätyisi :) Yhdellä z:n arvolla jopa molemmat mahdollisuudet voivat toteutua aivan kuten 14:57 sanoi. – PetteriP (*)
17:47 » Mikä kohta opetusmonisteesta auttaa 1. tehtävän kanssa?
18:18 » Hei sinä, joka harjoituksissa mietit, miksi 4b-kohdan kf ei ollut jatkuva. Siksi, että z:n rajat olivat väärin. Koska -2<z<1, mitään ongelmaa jatkuvuuden kanssa ei tule. – Aku
18:32 » 17:47: tarkoitat varmaankin harjoituksen 3 tehtävää 1 (sillä harjoituksen 4 tehtävässä 1 kohta on kerrottukin). Kertymäfunktion tunnistamiseen käytetään Lausetta 2.1. (eli jos jokin ei toteudu ei funktio ole kf ja jos kaikki toteutuu, niin funktio on kf). – PetteriP (*)
18:35 » ... Jatkuvan jakauman kf:n tunnistamiseen voi käyttää Lausetta 2.7 vaikka ne ovatkin (vain) riittäviä ehtoja mutta varsinkin ehto 1) on välttämätön. – PetteriP (*)
18:38 » ... Diskreetin jakauman kf on porrasfunktio, sillä Lauseen 2.4 mukaan F(x) = P(X ≤ x) = sum_{u ≤ x} f(u), mikä voi siten saada korkeintaan numeroituvasti äärettömän monta eri arvoa. Tätä ei ole siis suoraan sanottu luentomonisteessa mutta luennolla olen siitä puhunut :) – PetteriP (*)
18:47 » Voiko ajatella, että jos X ~ U(-2,2), niin se on sama kuin X ~ U(-2,0) kun X<0 ja X~U(0,2) kun X>0, en ole varma onko kysymys ymmärrettävä, mutta liittyy H3 Tehtävän 6 ratkaisemiseen muuttujanvaihtotekniikalla. Olen päässyt siihen vaiheeseen, että lasken auki lukuja f_x(-1/2) ja f_x(1/2), eli tasajakauman U(-2,2) arvoja noissa pisteissä.
18:47 » ....Molemmat saavat arvon 1/4 (luonnollisesti?), mutta tällöin näiden summa on 1/2, mikä puolestaan johtaa siihen, että integraali yli tiheysfunktion f_y ei ole 1 vaan 1/2.
18:54 » Tuohon mitä Aku kirjoitti 18:18: Aivan :) tehtävässä on oleellista, huomata (vaikka kuvasta) että kun x > 0, on (x-2)/(x+1) > -2 ja (x-2)/(x+1) < 1. Tällöin kuvaus g(x) = (x-2)/(x+1) on diffeomorfismi väliltä (0,∞) välille (-2,1). Käänteiskuvauksella h(z) = g^{-1}(z) olisi singulariteetti (ja merkkikin vaihtuisi) kohdassa z = 1, mutta Akunkin mainitsema -2 < z < 1 "pelastaa" meidät tältä :) – PetteriP (*)
19:11 » 18:47: melkein voi ajatella noin, mutta ihan samasta asiasta ei ole kyse. Laitoin kurssisivulle aiemmin esimerkin jossa tuollaisen ei-monotoninen muunnoksen jakauma määrätään sekä kertymäfunktiotekniikalla että diffeomorfismitekniikalla ei-monotoniselle (lue: monotoninen = aidosti kasvava tai aidosti vähenevä) (Lause 2.13). Se varmaankin auttaa hieman eteenpäin, mutta harmillisesti en ole ihan varma mikä on tuo vaihe "f_X(-1/2) = f_X(1/2) = 1/2" mihin viittaat. – PetteriP (*)
19:12 » ... piti lukea ei-monotoniselle (...) funktiolle g (Lause 2.13). – PetteriP (*)
19:22 » ... kertymäfunktiotekniikassa tuo paloihin jako menisi F(x) = P(Y ≤ y) = P(g(X) ≤ y) = P(g(X) ≤ y, X < 0) + P(g(X) ≤ y, X ≥ 0) additiivisuuden avulla. Nyt nuo g(X):t voi "purkaa" auki määritelmän avulla esim. P(g(X) ≤ y, X < 0) = P(X^2 ≤ y, X < 0) = P(-x ≤ X ≤ x, X < 0) = P(-x ≤ X < 0), kun x = sqrt(y) ja _kun_ y ≥ 0. Jos y < 0, niin P(X^2 ≤ y, X < 0) = 0, sillä {X^2 < y} on mahdoton tapahtuma. Vastaavasti jatkamalla asia selvenee. Mutta esimerkki kurssisivulla auttanee. – PetteriP (*)
19:33 » Tuota kurssisivulla olevaa esimerkkiä mukaillen olen tuohon vaiheeseen päätynyt. Minulla on kaksi g:n rajoittumaa g|A_1:(-∞,0)->(0,∞) ja gA_2:(0,∞)->(1,∞). Jälkimmäisessä valinta (1,∞) tulee siitä, että käänteisfunktio g|A_2(y)=sqrt(y-1), joka on määritelty vain kun y>1
19:37 » nyt ensimmäisen rajoittuman g|A_1 ja sen derivaatan tulo on (-sqrt(y)(-1/(2sqrt(y))= -1/2 ja toisen 1/2. Nyt tiheysfunktion pitäisi lauseen 2.13 mukaan olla f_y(y)= 1f_x(-1/2){kun y € (0,∞)} +

1f_x(1/2){kun y € (1,∞) ja 0 muulloin ?
19:56 » 19:33: :) nyt ymmärrän paremmin. Mainiota, nuo A_1 ja A_2 sekä kuvajoukot B_1 ja B_2 ovat juuri kuten kuuluukin. Jos mietit tuota (1,∞):ta, niin tarkemmin se tulee siitä että g kuvaa välin (0,∞) juurikin sille, sillä 1 < x^2 + 1 (< ∞) kun 0 < x (< ∞). – PetteriP (*)
20:00 » Juu, tottahan se. Kyseessä ei siis olekaan valinta vaan "luonnon laki". Mutta, ajatukseni alussa (18:47) oli siis, että jos tarkastelisi noita tiheysfunktion f_x arvoja ajatuksella " kun X < 0 (eli f_x(-1/2)), niin X ~U(-2,0) ja kun X > 0 (eli f_x(1/2)), niin X~U(0,2), jolloin f_x(-1/2) + f_x(1/2) = 1
20:06 » ... jatkossa tuo "nyt ensimmäisen ... = -1/2 ja toisen 1/2". Monisteessa ja esimerkissä laskettiin yhteen termejä, jotka ovat muotoa f_X(h(y)) × |h'(y)|. Kun h = h_1 = (g|A_1)^{-1}, niin kuten sanoit h(y) = -sqrt(y) joten h'(y) = -1/(2h(y)). – PetteriP (*)
20:07 » ... Kun nämä sijoittaa paikoilleen, tästä termistä tulee f_X(-z) / (2z) kun z = sqrt(y) ≥ 0. Tämä ei siis ole sama kuin -1/2. Jatkamalla samoin saa tf:n yleisesti. Kun erityisesti X ~ U(-2,2), tuon f_X(-z):n voi laskea auki ja silloin f_X(-z) = 1/4 × 1{0 < z < 2}, kun z = sqrt(y). – PetteriP (*)
20:15 » 20:00: eli auki kirjoitettuna ensimmäisen välin A_1 ja B_1 osuus tf f_Y:stä on siis 1/4 × 1{0 < sqrt(y) < 2} / (2×sqrt(y)) (tähän lisätään vielä se A_2 -> B_2 osuus). Tuo mainitsemasi "derivaatan tulo" selvensi minulle, mistä esim. mainitsemasi f_X(1/2) ilmestyi. Kannattaa lukea vielä tarkkaan se kurssisivun esimerkin vastaava kohta. Toivottavasti vastaukseni selvensi "ongelmaa". – PetteriP (*)
21:46 » Kiitos avusta, eiköhän se näillä ratkea. Ainakin jos nukkuu yön yli ensin :D
15:47 » Onkos tässä jotain merkintä virheitä? Vai voisiko tuon kolmannen harjoituksen kolmannen tehtävän "tehdä" seuraavasti? \begin{align*} f_Z(z)&= f_{X²-2}(z)=\frac{1}{6}\textbf{1}_{\big \lbrace z\in\lbrace (-1)²-2, 0²-2, 2²-2, 3²-2 \rbrace \big \rbrace}+\frac{1}{3}\textbf{1}_{\big\lbrace z=1²-2 \big \rbrace } \end{align*}
18:45 » 15:47: en ole ihan varma mihin merkintävirheisiin viittaat, tuossa on ainakin yksi virhe g^{-1}(y):n paikalla pitäisi olla g^{-1}({y}). :) Mutta tuohon jälkimmäiseen kohtaan voin vastata :) Ei aina, mutta H3T3:n tapauksessa _onnekkaasti_ voi :) – PetteriP (*)
18:47 » ... Yleinen muotoilu vastaavalle tehtävälle olisi f_X(x) = p_1 × 1_{x ∈ A_1} + p_2 × 1_{x ∈ A_2}. Kun Z = g(X), niin luen tuon alla kirjoittamasi tarkoittavan f_Z(z) = p_1 × 1_{x ∈ g(A_1)} + p_2 × 1_{x ∈ g(A_2) }, missä g(A) on joukon A kuvajoukko kuvauksessa g. – PetteriP (*)
18:49 » ... Lause 2.10 tai alla esittämäni summatapa taas tarjoisi ptnf:ksi f_Z(z) = p_1 × sum_x 1_{ x ∈ A_1, g(x) = z} + p_2 × sum_x 1_{x ∈ A_2, g(x) = z}. – PetteriP (*)
18:51 » ... _JOS_ g on injektio joukossa A, niin sum_x 1_{ x ∈ A, g(x) = z} = 1_{ z ∈ g(A) } (oikein mainio harjoitustehtävä on miettiä miksi?? :) – PetteriP (*)
18:52 » ... Koska H3T3:ssä A_1 = {-1,0,2,3} ja A_2 = {1} on g injektio kummallakin joukolla ja ehdotuksesi toimii mainiosti. – PetteriP (*)
18:57 » ... Jatkokysymyksenä kannattaakin laskea tarkkaan, mitä tapahtuu jos A_1 = {-1,0,1,2} ja A_2 = {3} (ja muuten tehtävä pysyy muuttumattomana). Nyt antamasi ehdotus antaakin funktion f_Z, jolle sum f_Z(z) = 5/6 kun taas summaaminen säilyttää todennäköisyyden (kuten kuuluukin :) – PetteriP (*)
19:14 » ... siis tuossa "sum_z f_Z(z) = 5/6" ja "kun taas summaaminen..." pitäisi olla "kun taas lauseen 2.10 tai alla esittämäni tavalla summaamalla muodostettu f_Z on ptnf" – PetteriP (*)
17:07 » Täytyy iha palata tuohon torstai-illan ongelmaan lauseen 2.13 kanssa. Vaikka Petteri kirjoitti ohjeeksi "Monisteessa ja esimerkissä laskettiin yhteen termejä, jotka ovat muotoa f_X(h(y)) × |h'(y)|.", niin aina vaan kovapäisesti yritin saada järkeviä asioita ulos tutkimalla termiä f_X(h(y) |h'(y)|). :D :D Eli kannattaa nukuttua yön yli kun tuntuu ettei enää kykene :D Ja KANNATTAA OLLA TARKKANA SULKUJEN KANSSA