Laskuharjoitukset 2

17:08 » Mitä jakaumaa T4 satunnaismuuttuja X noudattaa? Vai noudattaako mitään tiettyä?
17:34 » 17:08: tehtävässä 4 satunnaismuuttujan X jakaumaa ei ole sen tarkemmin spesifioitu. Ainoastaan tiedetään, että X > 1. Tämä tarkoittaa, että X:llä on kf F_X ja siitä tiedetään lähinnä että F_X(x) = 0 kun x ≤ 1 (+ lauseen 2.1. ominaisuudet). Mutta esimerkiksi ei tiedetä, onko X diskreetti tai jatkuvasti jakautunut. Vastaukseen tulee jäämään näkyviin tuo kf F_X eikä sitä kannata yrittääkään "sieventää" pois. :) – PetteriP (*)
15:38 » Liittyykö materiaalin kpl 2.8 T4?
22:20 » 15:38: Joo, liittyy. (Ja jos käsillä on Tuomisen kirja Todennäköisyyslaskenta I, sieltä luvusta 2.7 löytyy vielä lisäesimerkkejä.)
23:20 » 15:38: kuten arvelitkin ja 22:20 mainitsikin, kyllä se tosiaankin liittyy kappaleeseen 2.8 (eli tuo rajaus 2-1-2.7:aan ei nyt mennyt ihan kohdalleen...). Siihen voi soveltaa kertymäfunktiotekniikkaa (joka toimii aina), ptnf:n tai tiheysfunktion olemassaoloahan ei ole tehtävänannossa taattu. – PetteriP (*)
11:42 » Triviaali asia, mutta: voiko annetulle tiheysfunktiolle siis halutessaan määrittää minkä tahansa reaalilukuarvon yksittäisessä pisteessä, myös negatiivisen? Koska sehän ei joka tapauksessa vaikuta integraalin arvoon? Eli tiheysfunktion määrittämiseksi ehto f(x) >= 0 on yhdessä reaaliakselin integraalin arvon kanssa riittävä ehto, mutta ehto f(x) >= 0 ei tuossa ole välttämätön sille, että funktio on tf?
11:55 » (Liittyi siis tehtävään 6, jossa yhdessä pisteessä on kaksi korostetun "luontevaa" tapaa määritellä tiheysfunktion arvo, joista voi selvästi valita jommankumman, mutta jäin miettimään, voisiko itse asiassa valita minkä tahansa muunkin.)
12:17 » 11:42: Oikeassa olet, ettei yksittäinen piste vaikuta integraalin arvoon. Kuitenkin tiheysfunktion määritelmä (määritelmä 2.8) vaatii, että tiheysfunktio on ei-negatiivinen, ts. f(x) >= 0 kaikilla reaaliluvuilla x. Negatiivista arvoa ei siis voi valita, mutta muuten voi vapaasti. ... – Joonas
12:18 » 11:42: ... Esimerkiksi U(0,1) -jakauman (tasajakauma välillä (0,1)) tiheysfunktiosta voisi muuttaa vaikkapa f(0.5) = 2016 ja tämä muutettukin tiheysfunktio olisi edelleen saman jakauman tiheysfunktio. Materiaalin sivulla 26 on kerrottu enemmän tästä tiheysfunktion ei-yksikäsitteisyydestä. – Joonas
12:24 » Ah, kiitos. Enpä muistanut katsoa määritelmää. :) Eli jos on annettu kf ja tarkistaa sen jatkuvuuden sekä derivoituvuuden melkein kaikkialla, niin periaatteessa derivoituvuutta jossain äärellisessä määrässä mahdollisia epäderivoituvuuspisteitä ei tarvitse edes tarkistaa, jos ei tunne siihen vetoa, vaan tf:n voi niissä pisteissä määritellä mielivaltaisesti?
12:24 » ("Mielivaltaisesti" p.o. siis nimenomaan "asettamalla jonkin ei-negatiivisen arvon".)
12:40 » 11:42: Joonas vastasikin mainiosti tuohon negatiivisuuskysymykseen ja antoi hyvän esimerkin tuosta ei-yksikäsitteisyydestä. – PetteriP (*)
12:48 » 12:24: ja kyllä. Jos on tarkistanut että annettu kf F on jatkuva, löytää sopivat välit joissa sen voi helposti derivoida ja jäljelle jää vain muutama (äärellisen monta) poikkeuspistettä, niin näissä arvoksi voi valita minkä tahansa haluamansa luvun [0, ∞) sillä yksittäiset pistearvot voi aina "vaihtaa toiseksi". – PetteriP (*)
13:00 » 12:24 jatkoa: tämän takia lauseessa 2.7. sanotaankin, että tf:ksi _voidaan_ valita lauseen 2.7. toteuttavan kf:n F derivaatta F'. Mikä tahansa ei-negatiivinen funktio g, joka on = F' lukuunottamatta äärellistä määrää poikkeuskohtia, _voitaisiin_ myös valita :) – PetteriP (*)
13:02 » Hyvä, kiitos. Vielä jatkokysymys: miksi tf sitten halutaan määritellä niin, että se saa vain epänegatiivisia arvoja? Siis hajoaisiko teoriassa jokin palanen, jos tällaisetkin tapaukset sallittaisiin, vai onko kyseessä vain sellainen ajatus, että a) kun yksittäisten pisteiden arvoilla ei kuitenkaan ole kertymäfunktion näkökulmasta väliä, miksipä ei rajoitettaisi määrittelyä näin ja b) tämä rajaus

helpottaa erinäisiä tarkasteluja?
14:41 » 13:02: mainiota pohdintaa :) vastaus on lähinnä a) ja b). Varsinainen kysymyshän on "mitä tarkoittaa, että f on ei-negatiivinen?" Periaatteessa meille tosiaan riittäisi tässä "f (x) ≥ 0 melkein kaikilla x". Pian osottautuisi, että "huonoista" kohdista, joissa f(x) < 0, haluattaisiin kuitenkin _ihan jokaisessa_ tarkastelussa aluksi eroon, joten helpoimmalla pääsee "siivoamalla" ongelmat pois alusta alkaen. :) Poissa silmistä, poissa mielestä :) – PetteriP (*)
16:55 » jokin tökkii tehtävässä 1b pahemman kerran. Saan P(A|C)=P(B|C)=1/3 ja näiden tulosta 1/9, mutten saa P(A∩B|C) taipumaan samaan mitenkään.
18:26 » Oletko jo laskenut todennäköisyyden P(C)? Mieti sitten mitä on P((A ∩ B) ∩ C). Tarkastele tätä vaikkapa ihan suotuisten alkeistapauksen kautta, näitä ei taida olla kovin montaa. Tämän jälkeen saat helposti laskettua mitä on P((A ∩ B) | C), jonka jälkeen oletkin jo valmis.
18:45 » 16:55: tuolla 18:26:n vihjeellä tuon ehdollisen tn:n P(A∩B|C) laskemisen pitäisi taipua :) – PetteriP (*)
20:09 » Täytyykös tehtävässä 3 vielä osoittaa, että johdettu kaava/funktio todella on kertymäfunktio?
21:11 » 20:09: Riippuu siitä, miten sait saamasi funktion. Jos "heitit hatusta", niin pitää vielä perustella, että se todella on annetun jakauman kertymäfunktio. Jos sen sijaan käytit jotain lausetta, niin käyttämäsi lause mahdollisesti takaa/"lupaa", että lauseen antama funktio on jonkin tietyn sm:n kertymäfunktio. Tällöin siis tarvittavat perustelut sisältyvät lauseen todistukseen eikä niitä tarvitse enää uudestaan perustella. ... – Joonas
21:11 » 20:09: ... Mutta jos ajattelit "kelvollisen kertymäfunktion" ominaisuuksien (lause 2.1) osoittamista, niin tätä ei tarvitse erikseen tehdä. Jos nimittäin tiedetään jo, että funktio on tietyn sm:n kertymäfunktio, niin silloin se erityisesti on "jokin kelvollinen kertymäfunktio" ja toteuttaa kaikki kertymäfunktion yleiset ominaisuudet. Toivottavasti vastasin kysymykseesi! – Joonas
21:29 » Joonas: Jälkimmäistä tarkoitin. Eli sitä, täytyykö näyttää, että löydetty kertymäfunktio toteuttaa lauseen 2.1 ehdot. Käyttämäni lause kyllä lupaa, että löydetty tekele on kertymäfunktio :)
22:00 » 21:29: Ei siis tarvitse. Lauseen 2.1 "kääntäen"-osan avulla tarkistamalla ehdot voisi esimerkiksi perustella funktion 1/(1 + exp(-x)) olevan kelvollinen kertymäfunktio. Nyt ei kuitenkaan tarvitse perustella saadun funktion kertymäfunktioutta 2.1-"kääntäen"-lauseella, sillä käyttämäsi lause perustelee jo. Ja itse asiassa 2.1:n "kääntäen"-osan antama tulos ei edes riittäisi: 2.1-"kääntäen" kertoo vain, että ehdot täyttävä funktio on _jonkin_ sm:n kf, mutta nyt tarvitaan nimenomaan annetun X:n kf. – Joonas
08:53 » 20:09 (21:29): verratonta dialogia Joonaksen kanssa :) Sait varmastikin jo vastauksen. – PetteriP (*)
09:22 » Joonas: Juu, mietin itse asiassa, että olisin tarkastellut asiaa lauseen 2.7. avulla. Tämäkään lause ei kuitenkaan anna takeita muusta kuin siitä, että kf on jatkuvan jakauman kf. T6 näkyy liittyvän tähän. Lauseen 2.6.a) implikaatio riittää siis tässä oikein hyvin.
09:23 » Petteri: Kyllä vain :)
10:23 » eikö 1b:ssä ole merkitystä tuolla "ensimmäinen ja toinen" -kohdalla? Jos tuo on merkityksellinen niin eikö suotuisia alkeistapauksia P((A ∩ B) ∩ C):n kannalta ole vain 1 36:sta? Eli ensimmäisellä heitolla 5 ja toisella 2.
10:26 » näinhän se on
12:28 » 10:23: tuo tapahtuma (A ∩ B) ∩ C on aivan kuten päättelitkin ja 10:26 varmisti :) – PetteriP (*)
15:44 » Mikä on määritelmä 1.4, joka mainitaan laskarien ekassa tehtävässä? Onko se määritelmä 1.4 kalvoista vai kirjasta? Ja onko tämä määritelmä varmasti merkattu luvulla 1.4?
16:47 » Määritelmä 1.4 (Kahden tapahtuman riippumattomuus). Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos P(A∩B) = P(A)P(B).
16:47 » Petri Koistisen laatimasta monisteesta tuon bongasin
17:45 » Kurssillahan ei ole käytössä oppikirjaa. :) (Toki monia sellaisia voi varmasti käyttää opiskelun

tukena.) Olettaisin, että jos ei muuta ole sanottu, viitataan tosiaan opetusmonisteeseen, joka löytyy täältä: http://wiki.helsinki.fi/pages/viewpage.action?pageId=196948970#TodennäköisyyslaskentaII,syksy2016-Kurssimateriaali

18:30 » 15:44: määritelmä 1.4 tosiaankin (kuten 16:47 ja 17:45 päättelivät), kuten muutkin numeroidut määritelmät ja lauseet, viittaavat nyt (ja jatkossa) luentomonisteeseen, jonka löydät 17:45:n mainitsemasta osoitteesta. Pahoittelen, etten huomannut tarkentaa tätä tehtäväpapereihin. Muokkasin kurssisivua hieman selkeämmäksi tältä osin. – PetteriP (*)

18:36 » 15:44: jatkoa. Määritelmä löytyy myös kalvoista, mutta (valitettavasti) ilman numeroa. Tarkistin vielä, että tuo määritelmä on merkattu luvulla 1.4. ja se löytyy sivulta 12 luvusta 1.7. Petri Koistisen opetusmonisteesta. – PetteriP (*)

22:23 » "johda kaava jakauman kertymäfunktiolle" .... miten?

22:36 » 22:23: analyysin peruslauseella :), tai lauseella 2.6a.

08:20 » 22:23: kuten 22:36 sanoikin, lause 2.6 on ystäväsi tässä :) Tuo lause kertoo, miten tf:n avulla saadaan kf (kohta a) sekä miten kf:n avulla löydetään tf (kohta b) olettaen tietenkin, että tf on olemassa (eli jakauma on jatkuva). Tuo "johda kaava" on ehkä harhaanjohtava, varsinaisesti tehtävässä ei tarvitse _johtaa_ (yleensä synonyymi verbille "todistaa") mitään. Tehtävän voisi muotoilla esimerkiksi myös "Määrää satunnaismuuttujan X kertymäfunktio." – PetteriP (*)

15:07 » Vinkkiä T4? Miten lähtisi liikkeelle?

15:17 » 15:07. Kf:n määritelmä sm:lle X on F_X(x) = P(X ≤ x). Vastaavasti Y:n kf on F_Y(y) = P(Y ≤ y). Yritä muokata tapahtuma {Y ≤ y} muotoon {X ≤ x} jollakin x käyttämällä apuna Y:n määritelmää Y = 2 log(X-2). Tällöin F_Y(y) = F_X(x) (mieti miksi :). Ja lisäyksenä, tarkoitin tehtävänannossa luonnollista logaritmia tuolla log(..):llä. – PetteriP (*)

18:59 » Ehkä vähän tyhmä kysymys; miten tehtävässä annetun Yn määritelmästä log (2X-2) saadaan 2log(X-2)?

19:47 » 18:59: Ei lainkaan tyhmä kysymys! Vastaus on, että ei mitenkään! Petteri on vain ilmeisesti kopioinut vahingossa tehtävänannon lausekkeen väärin tuohon edeltävään vihjeeseen. Nuo lausekkeet eivät nimittäin ole yleisesti samat, minkä näkee esimerkiksi, jos kokeilee sijoittaa niihin jotain konkreettisia X:n arvoja. – Joonas

20:03 » 18:59: no hupsista. :) sattuipas nolo kopiointivirhe, tuossa olisi siis tosiaankin pitänyt olla Y = log (2X-2). Ja kuten Joonas sanoikin log (2X-2) ja 2log(X-2) eivät kuvaa samaa asiaa. Pahoittelen tuota töppäystä. Ja hienoa että kysyit, olisi muuten jäänyt huomaamatta tuo virhe. :) – PetteriP (*)

12:38 » Onko harjoituksen 3 tehtävässä 3 tarkoitettu tuolla erikoisella boldatulla ykkösellä karakteristista funktiota vai mistä on kyse? Ei ole vastaavaa merkintää aiemmin tullut vastaan.

13:09 » Indikaattorifunktio. Löytyy kai monisteesta.

13:09 » 12:38: kyllä. Tuo 1{A} tarkoittaa tapahtuman A _indikaattoria_ eli analyysin termein lausuttuna on joukon A karakteristinen funktio, _mutta_ tällä kurssilla nimitämme sitä indikaattoriksi. Tämä merkintä löytyy luentokalvojen luvun 2 määritelmästä 2.2 ja varsinkin tekstistä sen alla. Välillä kirjoittaisin A:n alaindeksiin, mutta "riville nostettuna" se on usein selvempi. – PetteriP (*)

13:11 » ... Esimerkiksi tehtävässä 3 esiintyvä funktio g(x) = 1{x ∈ {-1,0,2,3}} tarkoittaa siis funktiota, jolle g(x) = 1, kun x = -1, 0, 2 tai 3 ja g(x) = 0 kaikilla muilla x. Kun X on jokin sm, niin esim. Y = g(X) = 1{X ∈ {-1,0,2,3}} olisi diskreetti sm, joka saisi arvon 1 aina kun X = -1,0,2 tai 3 ja joka saisi arvon 0 muutoin. – PetteriP (*)

13:12 » 13:09: vastasimme lähes samanaikaisesti :) – PetteriP (*)

13:13 » Juu, olihan tuo materiaalissakin ja se on sieltä tullut luettua. Viime aikoina vain tullut pyöriteltyä niin paljon karakteristia funktioita muilla merkinnöillä, että en nyt heti muistanut tätä indikaattoria. Kiitos!

13:49 » 13:13: ollos hyvä :) monesti varmaankin käytetään kreikkalaista pientä chi:tä ja A on alaindeksissä (tyyliin χ_A). Mutta indikaattorinimitys on tyypillisempi tn-teoriassa ja -laskennassa, sillä karakteristinen funktio yleensä meillä viittaa sm:n karakteristiseen funktioon (johon törmäämme

kurssilla myöhemmin). – PetteriP (*)
22:07 » Harjoituksen 3 tehtävä 6: onko tehtävänannon funktiota syytä lukea tavanomaiseen tapaan niin, että f_X(x) = 0, kun x < -2 tai x > 2?
09:53 » Jatko: mihin tuota oletusta ko. tehtävässä oikeastaan edes tarvitsee? :) Tf:tahan pyydetään vain spesifissä annetussa tapauksessa, yleisessä tapauksessa kai riittää operoida pelkällä kf:lla?
09:55 » 22:07: oikein hyvä kysymys! Tuota oletusta (f_X(x) = 0 kun x ei ole välillä (-2,2)) ei oikeastaan tarvita (ja siksi en sitä siihen laittanut), mutta selkeämmän mielikuvan saamiseksi sen voi "ajatella" pitävän paikkaansa :) – PetteriP (*)
09:58 » 09:53: ... Olin juuri lisäämässä edelliseen että "Hyvä kysymys olisi myös, miksi ylipäätään oletetaa, että f_X(x) > 0 kun x on välillä (-2,2). Tällä hieman "turhalla" oletuksella halusin vain varmistaa, että tuohon x = 0 kohtaan kiinnitetään huomiota :)". Eli _erittäin_ hyvä jatkokysymys: varsinaisesti sitäkään ei tarvitse :) – PetteriP (*)
20:26 » Mitäs mitäs, perjantai-ilta ja täällä on näin hiljaista?
22:09 » lauseen 2.7 johtopäätöksessä sanotaan "Tällöin F on jatkuvan jakauman kertymäfunktio, ja jakauman tiheysfunktioksi _voidaan_ valita sen derivaatta F´ = f". Aloin vain miettimään, että entäpäs jos ei halua valita derivaattaa tiheysfunktioksi. Kysymys oikeastaan liittyy muotoiluun, eli jos on osoittanut jollekin funktiolle lauseen 2.1 ja 2.7 ehdot ja derivoinut kertymäfunktion, niin olisiko oikein sanoa, että "...Tällöin kertymäfunktion F _eräs_ tiheysfunktio on F´" ?
22:10 » kun eihän tiheysfunktio ole yksikäsitteinen
22:24 » ja sitten vastaan itselleni että totta kai voi ja on oikein sanoa näin :) Kiitos ja hauskaa viikonloppua kaikille!
22:36 » 22:24: :) olin juuri vastaamassa ns. "pitkän kaavan" mukaan. Mutta lyhyesti, tuo "voidaan valita" tosiaankin viittaa ajatukseen "Tällöin jakauman eräs tiheysfunktio on funktio f, jolle f(x) = F'(x) niissä pisteissä, missä F'(x) on määritelty ja f(x) = 0 muutoin". Tästä on lyhyt huomautus monisteessa (lauseen 2.6 ja lauseen 2.7 välissä), missä f(x) tosin on vapaasti valittu noissa poikkeuspisteissä. Mutta oikein hyvää viikonloppua myös :) – PetteriP (*)