Laskuharjoitus 11

11:17 » H11T1, ominaisa-arvot on rankka lasku. Vinkkejä?
12:37 » En ole juuri miettinyt tehtävää itse, mutta jos kyse oli definiittisyyden tutkimisesta, voi katsoa vaikka täältä luennolla mainittuja Sylvesterin kriteerejä: https://wiki.helsinki.fi/download/attachments/87264084/Korjattu3luku.pdf?version=1&modificationDate=1354616554336&api=v2 s. 89. Huomasithan, että osasta matriiseja näkee ominaisarvoja laskematta, että ne eivät voi olla Cov-matriiseja?
12:39 » ...tai vaikka Wikipediasta https://en.m.wikipedia.org/wiki/Sylvester's_criterion
15:29 » 11:17: kuten 12:37 ja 12:39 mainitsi, osasta näkee suoraan, että ne eivät voi olla kovarianssimatriiseja. Vihje 1: varianssi on aina ei-negatiivinen. Toinen vihje: yksi ja vain yksi on mahdollinen (eli en huijaa :) ... – PetteriP (*)
15:30 » ... 3. vihje: cov(X,Y)^2 ≤ var X * var Y (eli Cauchyn-Schwarzin ey). 4. Sylvesterin kriteerillä (eli laskemalla determinantteja) voi myös selvittää kaksi viimeistä matriisia. – PetteriP (*)
15:32 » 14:52: kuten 15:28:aa, ei tuo minuakaan epäilytä :) – PetteriP (*)

16:42 » Jäin vielä funtsimaan, että matriisin definiittisyyden voi kai "onnekkaasti" hoksata myös tarkastelemalla vain vastaavan neliömuodon definiittisyyttä. Esim. määrittelee f(x, y, z) = (3/2)*x^2+(5/2)*y^2+4*z^2+4*x*y-1*x*z+4*y*z, ja tuosta arvaa aika helposti, että vaikka f(1, 1, 1) ja f(1, -1, 1) ovat erimerkkiset (minkä sitten vahvistaa laskemalla), mistä haluttu väite seuraa. Paljonko tästä lisätavasta on hyötyä entisten päälle on sitten toinen kysymys... :)
16:48 » 16:42: kyllä :) tapoja on monia :) – PetteriP (*)
14:05 » Jos haluaisi jostain syystä vielä käyttää juuri ominaisarvoja pos. definiittisyyden tarkistamiseen ja käytössä ei olisi laskinta/tietokonetta, olisiko helpoin tapa tällainen: 1) muodostetaan kar. polynomi ja esitetään se funktiona f(l) 2) lasketaan f(0) > 0 3) tarkistetaan f'(l):n nollakohdat, molemmat positiivisia => f on kasvava neg. reaaliakselilla, joten ominaisarvot löytyvät pos. reaaliakselilta => matriisi on pos. definiitti?
14:12 » ...siis toki ajatellen juuri sitä H11T1:n matriisia, joka sattuu olemaan positiivisesti definiitti ja jolla nämä ehdot sattuvat kätevästi pätemään. :) Tuossa ei varsinaisesti tarvittaisi kuin toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, kun riittää selvittää ominaisarvojen etumerkki.
18:14 » 14:05.14:02: sanoisin että laskennallisesti ainakin käsin laskiessa ja pos. definiittisyyden haluaisi osoittaa 3 × 3 matriisille olisi tuo Sylvesterin sääntö. Laitoin kurssisivulle esimerkkejä näistä :) ... – PetteriP (*)
18:14 » ... mutta jos haluaa käyttää karakteristisia polynomeja p(t) = det(A - tI) = (a-t)(b-t)(c-t), kun a,b,c ovat ominaisarvot (ja oletetaan, että A on symmetrinen, jotta ominaisarvot ovat varmasti reaalisia), niin päättelysi on toimiva ja mainio tapa :) – PetteriP (*)
18:15 » ... Ja seuraavassa lyhyt perustelu sille. Voidaan luonnollisesti olettaa, että a < b < c. (sivuutan moninkertaisten juurien miettimisen :) Siispä A on pos. definiitti jos ja vain jos a > 0. – PetteriP (*)
18:15 » ... Rollen lauseen nojalla derivaattapolynomi p':lla on nollakohdat d < e ja nämä toteuttaa a < d < b < e < c. Joten jos A on pos. def. niin myös 0 < d < e. – PetteriP (*)
18:16 » ... Mutta oletetaan nyt, että tiedämme vain, että 0 < d < e (eli tarkistamalla positiivisuuden 14:12:n tapaan). Koska p'(t) = -t^2 + ..., niin p on aidosti vähenevä, kun t < d. – PetteriP (*)
18:18 » ... Jos 0 < a, niin p(0) > p(a) = 0, sillä sekä 0 että a < d. Jos taas a < 0, niin p(0) < p(a) = 0 samalla perusteella. Koska p on 3. asteen polynomi, on helppo päätellä, että itse asiassa a > 0 jos ja vain jos p(0) > 0. Eli ehdottamasi tapa toimii ainakin kun ominaisarvot ovat erisuuret. – PetteriP (*)
19:23 » Jees, kiitoksia. :) Huomasinpa, että piti tietysti kirjoittaa "...f on *vähenevä* neg. reaaliakselilla, f(0) = 0 ja lim f(l) = +inf, kun l -> -inf". :D Menetelmän hyöty taitaa joka tapauksessa olla aika rajoittunut, koska 1) alhaisissa dimensioissa determinanttiehto on yleensä hyvä ja 2)

korkeammissa taas ei derivaatan merkistä kai osaa välttämättä helposti sanoa sen enempää kuin kar. polynomistakaan... :)
19:53 » 19:23: suuremmille matriiseille erilaiset matriisihajotelmat (jotka onnistuessaan paljastavat onko matriisi pos.def. vai ei) alkavat olla taatusti helpoin reitti yhdessä Sylvesterin kriteerin kanssa. – PetteriP (*)
19:54 » ... myös ehdollistamiseen perustuvat tekniikat ovat tehokkaita :) – PetteriP (*)
22:14 » H11T6c: Kuinka pitkälle "auki" tf pitää laskea? Riittääkö viitata siihen, että se on erään tunnetun jakauman tf, tai kirjoittaa se "matriisiesityksenä", tai ainakin jättää neliöt avaamatta? :)
07:05 » 22:14: Matriisiesitys (viittaat varmaankin luentomonisteen lause 10.3:een joka käydään tänään luennoilla) riittää eli kunhan tietää kaksi parametria (vektori ja matriisi) niin lauseen 10.3. muoto riittää. Neliöiden avaamista ja täydentämistä saakin sitten harrastaa kohdassa d. :) Näissä d-kohdan laskuissa kannattaa surutta hyödyntää verrannollisuutta ja vihjeenä olisi pitänyt mainita että tämäkin d-kohdan jakauma on tunnettu. – PetteriP (*)
08:19 » Jep, ajattelin kömpelöllä ilmaisulla "matriisimuoto" juuri tuota kaavaa, jossa eksponenttifunktion argumentissa esiintyy kertolasku (y-mu)^T * Sigma * (y-mu), missä y ja mu ovat vektoreita, ^T transpoosi ja Sigma on matriisi. :) Ja joo, juuri (yhtä sievennystä vaille) tuosta muodosta lähdin d:ssä liikkeelle. d:ssäkin siis varmaan riittää tarkistaa verrannollisuudella, että tulee eräs tf, ja laskea jakauman parametrille jonkinlainen esitys?
08:20 » (p.o. "parametreille".)
08:31 » 08:19: kyllä vain :) ja nuo parametrit saa selville selkeiten purkamalla verrannollisuudella lauseen 10.3. muoto "auki" ja vastaavasti laskemalla verrannollisesti "neliöt" auki Bayesin kaavan antamalla ehd. tf:llä. Sitten vaan verrataan "kertoimia" keskenään ja ... :) – PetteriP (*)
11:55 » H11T3c: Olen käyttänyt laskemiseen tehtävän 2 kaavaa ja sain ulos matriisin, jossa on tietyt kovarianssit. Kuitenkaan en osaa laskea näitä kovariansseja auki.. Onko siis tarkoitus saada vastauksena matriisi, jossa on reaalilukuja vai ainoastaan laskukaavat näille?
11:58 » ...osaanpas laskea. Siis vedän sanani takaisin =)
12:00 » Minusta ainostaan viimeisessä kohdassa tarvitsee laskea :)
12:07 » Jep :)
16:26 » Tarvitsen vinkkiä nelostehtävään, en oikein ymmärrä mistä lähteä liikkeelle. Summat aina olleet hankalia :(
16:39 » 16:26: Ensin kannattaa käyttää linearisuutta E sum_i (X_i - V)^2 = sum_i E(X_i - V)^2 (missä V = 1/n sum_i X_i on se otoskeskiarvo)... – PetteriP (*)
16:41 » ... sitten laskea, mitä on E(X_1 - V)^2 (ja sitten miettiä, miksi E(X_2 - V)^2 antaa saman, ... ja miksi E(X_n-V)^2 antaa saman). – PetteriP (*)
16:42 » ... Nyt tuon (X_1-V):n voi purkaa auki X_1 - 1/n (X_1 + ... + X_n) ja nimetä esim. Y_1 = X_1 - 1/n * X_1 = (n-1)/n * X_1, Y_2 = -1/n * X_2, jne... – PetteriP (*)
16:44 » ... tällöin E(X_1-V)^2 onkin E(Y_1+Y_2+...+Y_n)^2 = E W^2, kun W = sum Y_i. Helpoin tapa laskea EW^2 on laskea EW^2 = var W + (EW)^2. – PetteriP (*)
16:46 » ... EW:n saa lineaarisuudella mukavasti ja var W:n laskemiseen voi käyttää riippumattomuuden ja summan varianssin yhteyttä. Laittamalla lopulta kaikki palaset yhteen, homman pitäisi ratketa :) – PetteriP (*)

15:05 » Tuhtia kamaa tämä luku 9.

15:40 » 15:05: kyllähän se on. Lopulta ajatus on se, että kun lopulta laiskistuu riittävästi, ja ryhtyy käsittelemään vain "tiheyksiä" (tämän päivän luennot laitoin skannattuna kurssisivulle) voi kaiken ajatella toimivan formaalisti kuin 1-ulotteisessa tapauksessa. :) – PetteriP (*)

13:53 » Mikä jahkauma kuvaisi ensi viikon keskiviikon vierailevan yllätystähden henkilöllisyyttä?

15:38 » 13:53: kerron keskiviikkona tarkemmin :) mutta jakauma on diskreetti ja nimi on jo nyt mainittu kurssisivulla :) – PetteriP (*)

19:04 » Lauseen 9.6 b-kohdan suunnan "<=" todistus on ehkä kummalisin mitä olen nähnyt. Jos oletetaan että sm. Y' on samoin jakautunut kuin Y ja sm. Z' samoin jakautunut kuin Z, ja Y' ja Z' ovat riippumattomia, niin eikö todella siitä seuraa että Y ja Z ovat riippumattomia? Kummaa sanon minä.

19:05 » Korjaus sm. Y, Y', Z ja Z' ovat sv.

19:24 » 19:04: laitan todistuksen kurssisivulle "hieman" aukaistuna :) mutta tuohon mitä ihmettelet, on vastaus: ei välttämättä seuraa. Ajattele vaikka: Y = Z ~ U(0,1). Tällöin Y ja Z eivät ole riippumattomia (esim E(YZ) = EY^2 = 1/12, mutta EY EZ = 1/4. ... – PetteriP (*)

19:26 » ... Valitaan (Y',Z') jotka noudattava tasajakaumaa yksikköneliössä. Tällöin Y' on samoin jakautunut kuin Y, Z' samoin jak. kuin Z ja Y' ja Z' ovat riippumattomia. Tämä varmaan selittää tuon kummallisuuden :) – PetteriP (*)

19:30 » ... mutta jos tiedetään lisäksi että M_{Y,Z}(u,v) = M_Y(u) M_Z(v), niin M_Y(u) = M_{Y'}(u) ja M_Z(v) = M_{Z'}(v). Ja riippumattomuuden avulla tiedämme jo että M_{Y',Z'}(u,v) = M_{Y'}(u)M_{Z'}(v) eli havaitsemme, että nyt (Y',Z'):lla ja (Y,Z):lla on sama MEF => (Y',Z') ja (Y,Z) ovat samoin jakautuneita... – PetteriP (*)

19:33 » ... Ja tästä seuraa, että Y ja Z ovat riippumattomia, sillä E(g(Y)h(Z)) = E(g(Y')h(Z')) = Eg(Y') Eh(Z') = Eg(Y) Eh(Z). Valitsemalla g(y) = 1{y ∈ A} ja h(z) = 1{z ∈ B} saadaan P(Y ∈ A, Z ∈ B) = P(Y ∈ A)P(Z ∈ B). – PetteriP (*)

19:34 » ... Eli 1) jos Y' ja Z' ovat riippumattomia ja Y on samoin jak. kuin Y' ja Z on samoin jak. kuin Z', niin välttämättä ei seuraa että Y on riippumaton Z:sta. – PetteriP (*)

19:35 » ... mutta 2) jos (Y,Z) on samoin jakautunut kuin (Y',Z') niin Y' on riippumaton Z':sta jos ja vain jos Y on riippumaton Z:sta. – PetteriP (*)

19:35 » ... eli kyseessä on sama vanha "reunajakaumat eivät määrää yhteisjakaumaa" :) – PetteriP (*)

19:46 » ... ja alla siis "Y riippumaton Z:sta" tarkoittaa samaa kuin "Y ja Z riippumattomia" :) Tuon edellisen voisi lukea tarkoittavan "Y:n ehdollinen jakauma ehdolla sv Z on sama kuin Y:n jakauma" mutta tämä on yhtäpitävää riippumattomuuden kanssa. – PetteriP (*)

07:08 » ... ja lasku kohdassa 19:04 menee tietty EY^2 = 1/3. Tuo 1/12 on tietty kovarianssi cov(Y,Z) = 1/12 (= 1/3-1/4) ja korrelaatio corr(Y,Z) on tietty 1. – PetteriP (*)

11:25 » Mihin kappaleeseen tämän viikon laskarit liittyy? Ysiin ja vähän kymppiin?

16:06 » 11:25: juurikin noin :) Lähinnä lukuun yhdeksän ja tuo multinormaalijakaumaan liittyvä tehtävä 6 osin lukuun 10 mutta myös lukuun 9 (ehdollistamisen ja momenttiemäfunktioiden kautta). – PetteriP (*)

16:18 » Korvaava taitaa olla klo 16-20 tuolloin 12. päivä?

16:38 » 16:18: korvaava on _14.12._ klo 16-20 kyllä. Laitan tänään tietoa kurssisivulle. – PetteriP (*)

21:42 » 16:18: tarkentava lisähuomautus. Mutta kurssikoe on 2,5 tuntia, joten oikeammin koeaika on 16.15-18.45. – PetteriP (*)

18:34 » Tänään (9.12.) perjantaiaamun laskareissa joku ruksasi listaan 3.5 tehtävää (kutostehtävä puolikkaana), mutta unohti kirjoittaa nimensä kyseiselle riville. Jos tunnistat olevasi tämä pe-aamun laskareissa 3.5 ruksia merkinnyt henkilö (yksikäsitteinen henkilö, muilla ei kyseistä ruksimäärää) ja haluat saada pisteesi, niin lähetäthän minulle sähköpostia (etunimi <piste> sukunimi <at> helsinki.fi)!
– Joonas