ESIM $\boxed{a = b}$

HARJ 6 TEHT

$$\underbrace{\mathbb{P}(X = Y)}_{a} \overset{\text{tays. add.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = Y = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\theta} \frac{\theta^{2k}}{(k!)^2} \overset{\theta=1}{=} \underbrace{e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}}_{=b}$$

„mainittu ei-haitala"

„hankala"

ESIM ~~[illegible]~~

$\boxed{a \geq b}$

$$a = \mathbb{P}(X = Y) \geq \mathbb{P}(X = Y \leq 3)$$

$$e^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} \dots \qquad = \underbrace{e^{-2}\left(1 + 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{6}\right)^2\right)}_{\text{helppo}}$$

hankala

$\boxed{a \leq b}$

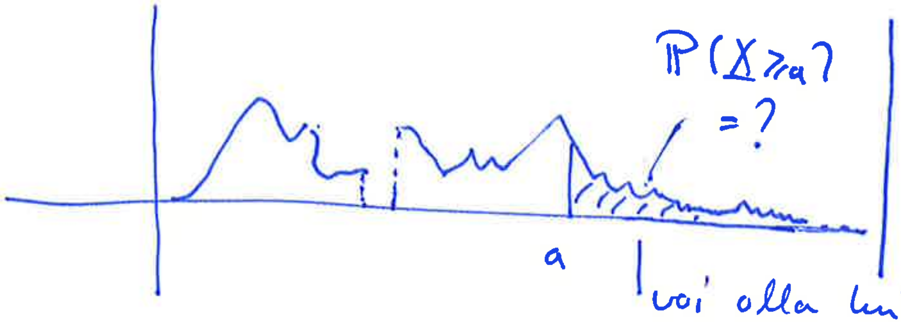
$$a = \mathbb{P}(X = Y) = \underset{\uparrow \text{ helppo}}{\mathbb{P}(X = Y \leq 3)} + \underbrace{\mathbb{P}(X = Y \geq 4)}$$

$$\leq \mathbb{P}(X \geq 4, Y \geq 4) \overset{X \perp Y}{=} \underset{\uparrow \text{ helppo}}{(\mathbb{P}(X \geq 4))^2}$$

$$\leq \mathbb{P}(X = Y \leq 3) + (\mathbb{P}(X \geq 4))^2$$

MARKOVIN EY

Kysymys: Jos tiedetään jotain odotusarvosta, voidaanko hänmittä päätellä jotain?



$\mathbb{P}(X \geq a)$ $=?$

Ol. $X \geq 0$ sat. mja

"voi olla kuinka "hankala" tahansa!"

(ei välttäm. jva, diskr!)

Väitämus $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$ eli voidaan "ajatella" että hn $\to 0$ vähintään "vauhdilla" $\frac{c}{a}$

Huom $X \sim U(0,M)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq a) = \begin{cases} \frac{1}{M}(M-a), & \text{kun } 0 < a < M \\ 0 & \text{kun } a \geq M \end{cases}$

$\mathbb{E}X = \frac{M}{2}$

Markov EY $\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{M}{2a}$ ($a \approx 0$ todella huono) vasta ≤ 1 kun $a \geq \frac{M}{2}$

Helpponden kuvio:

$\mathbb{P}(X \geq a)$ funktio

$M=1$: $\mathbb{P}(X \geq a) = 1-x$, kun $0 < x \leq 1$

MEY: $\mathbb{P}(X \geq a) \overset{0}{=} \frac{1}{2a}$, kun $x > 1$

Lause 6.1 MARKOVIN EY.

- $X \geq 0$ JA
- $\mathbb{E}X$ on olemassa

$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}X}{a} \quad \forall a > 0$

Tod TOINEN TAPA (MUTTA OIKEASTI SAMA)

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{E}\,\mathbb{1}\{X \geq a\} \overset{a>0\ !}{=} \mathbb{E}\,\frac{a}{a}\,\mathbb{1}\{X \geq a\}$$

$$= \frac{1}{a}\,\mathbb{E}\,\underbrace{a\,\mathbb{1}\{X \geq a\}}_{=\,Y}$$

merk. $Y = \begin{cases} a, & X \geq a \\ 0, & \underline{X < a} \end{cases} = \begin{cases} a, & a \leq X \\ 0, & 0 \leq X < a \end{cases}$

$\underline{\text{ok}}$ $X \geq 0$ $\Leftarrow$ $0 \leq X < a$

$$\leq \begin{cases} X, & a \leq X \\ X, & 0 \leq X < a \end{cases} = X$$

$\therefore\ \mathbb{P}(X \geq a) = \dfrac{1}{a}\,\mathbb{E}Y \leq \dfrac{1}{a}\,\mathbb{E}X$.

$\boxed{a>0}$ JA $\boxed{Y \leq X}$

TSEBYSEVIN EY.

MARKOVIN EY $\Rightarrow$ "MITÄ SUUREMPIA MOMENTTEJA $\exists$ SEN OHUEMMAT HÄNNÄT".

$\Rightarrow$ $\operatorname{Var} X < \infty$

$\Downarrow$

$\mathbb{E}X$ olemassa

TS. EY $\Rightarrow$ MITÄ PIENEMPI VARIANSSI, SEN ENEMMÄN ~~ja~~ JAKAUMA ON "KASKITTYNYT" $\mathbb{E}X$:n YMPÄRILLE

SEURAUS (HSLL)

heikko suurten lukujen laki

- $X_1, X_2, \ldots$ $\perp\!\!\!\perp$
- $\mathbb{E} X_1 = \mathbb{E} X_2 = \ldots = \mu$
- $\operatorname{var} X_1 = \operatorname{var} X_2 = \ldots = \sigma^2 < \infty$

$\uparrow$ eli var. $< \infty$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E} X_i$ ol.

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{tod.}$$

$$\mathbb{P}\left(\left| \overline{X}_n - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(eli $\overline{X}_n \xrightarrow[\text{stokastisesti}]{} \mu$)

HUOM

HEIKKO VAHVISTUS TOISTOKOE TULKINNALLE

Tod varmistetaan, että $\overline{X}_n$ tod. Tšebyševin ey:n ehdot: (

$$\mathbb{E}\overline{X}_n \underset{\text{nähdään}}{=} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{lin.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E} X_i}_{=\mu} = \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu}_{=n\cdot\mu} = \mu$$

$$\operatorname{var} \overline{X}_n = \operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\operatorname{var} X_i}_{=\sigma^2}$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$\therefore$ Tšeb. (void. käyttää)

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left| \overline{X}_n - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\operatorname{var}\overline{X}_n}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{kun } \varepsilon > 0.$$

(eli ε^2 miten pieni tahansa

Lause 6.2. (Tšebyševin ey)

- X sm
- $\operatorname{var} X < \infty$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(|X-\mu| \geq t) \leq \dfrac{\sigma^2}{t^2}$ $\forall t$
- $\mathbb{E}X = \mu$
- $\operatorname{var} X = \sigma^2$

Erit.

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall k = 1,2,\ldots$$

↑ keskihajonta

El, Esim. $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$\mathbb{P}(|X| \geq 5) \leq \frac{1}{25}$ ← ~~[illegible]~~ 96% välillä $(-5,5)$

$\mathbb{P}(|X| \geq 100) \leq \frac{1}{100}$ 99% välillä $(-10,10)$

Tod. OM $Y = (X-\mu)^2$ | vain m. että Markovin ey:tä voi käyttää

- $Y \geq 0$ (ok)
- $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(X-\mu)^2 \underset{\mu = \mathbb{E}X}{=} \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 \overset{\text{määr.}}{=} \operatorname{var} X \overset{\text{oletus}}{<} \infty$

$\therefore$ Markovin ey $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathbb{P}(Y \geq a)}_{=} \leq \dfrac{\mathbb{E}Y}{a} = \dfrac{\overset{\sigma^2}{\operatorname{var} X}}{a}$

$\mathbb{P}((X-\mu)^2 \geq a) = \mathbb{P}(|X-\mu| \geq \sqrt{a})$ kun $a > 0$

$\therefore$ kun $t = \sqrt{a} > 0$, niin

(*) $\mathbb{P}(|X-\mu| \geq t) \leq \ldots = \dfrac{\sigma^2}{a} = \dfrac{\sigma^2}{t^2}$.

Kun $t = k\sigma$, niin

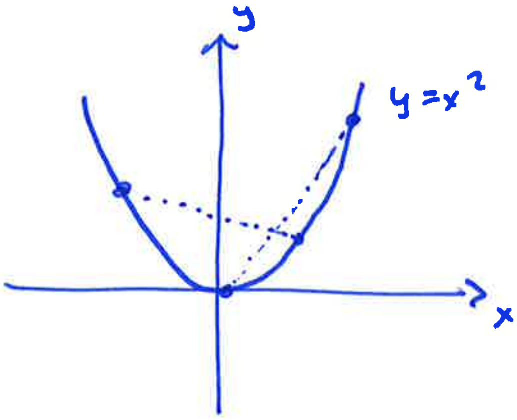
(*) $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \dfrac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \dfrac{1}{k^2}$.

ESIM HT 7 TEHT 1 KÄSITTELEE TŠEBYŠEVIA.

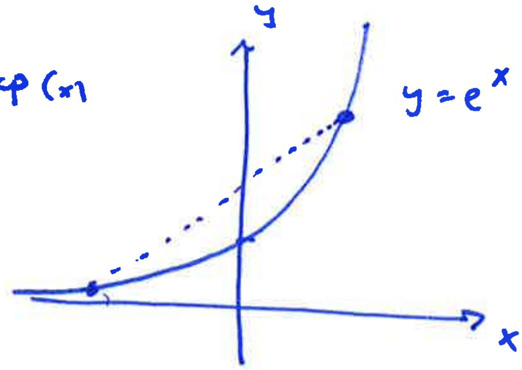
KONVEKSIT FUNKTIOT

ESIM

x^2

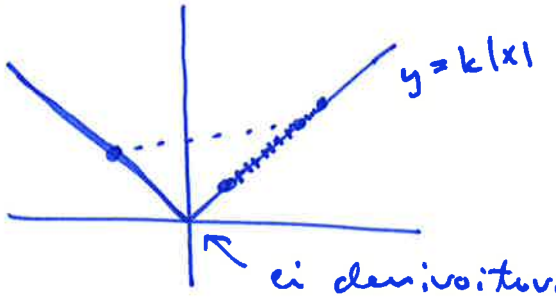


$\exp(x)$



MYÖS EI-DERIV.

$|x|$



ei derivoituva mutta

"MÄÄR"

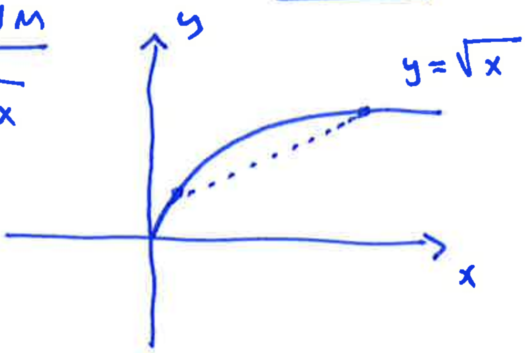
f konveksi, jos se on jokaisen jänteensä alapuolella.

↓ matemaattisemmin

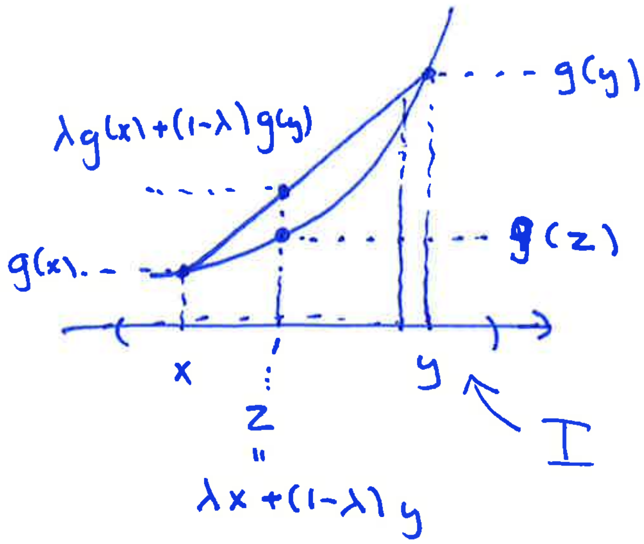
KONKAAVI

ESIM

$\sqrt{x}$



log



Konveksin funktion "tunnistaminen"

Lause 6.4 TOIMII $\forall$ KONVEKSEILLE

(JA ON HIT ☺) (ELI KERTOO MILLOIN JA VAIN MILLOIN g on konveksi, "GEOMETRINEN EHTO")

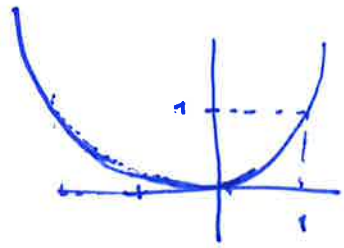
Lause 6.5 g konveksi?

a) kun g JVASTI DERIV. JA g' kasvava (välillä I)
$\Rightarrow$ g konveksi (välillä I)

b) kun g 2 KERTAA JVASTI DERVA JA
$g'' \geq 0$ (välillä I) $\Rightarrow$ g konveksi (välillä I)

Huom. • Lause 6.5 ei toimi funktiolle $g(x) = |x|$ koko $\mathbb{R}$:ssä.

• Vast. $g(x) = \begin{cases} + x^2, & x \geq 0 \\ + \frac{1}{4} x^2, & x < 0 \end{cases}$



on konveksi (Lause 6.5 a)

sillä $g'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ \frac{1}{2} x, & x < 0 \end{cases}$

$g'(0) = \begin{cases} \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2}{x} \\ \lim_{x \uparrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^2}{x} \end{cases} = 0.$

$\therefore$ g' JVA + kasvava

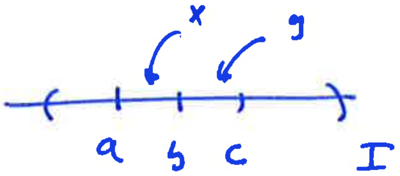
Mutta $g''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x < 0 \end{cases}$ (ei voi olla jva 0:ssa)

Lause 6.5 Tod

b) $\Leftarrow$ a) $\quad \overset{\text{OS}}{g''} = (g')' \geq 0 \overset{a)}{\Rightarrow} g'$ kasvava

$\Rightarrow g$ konveksi

a) $\Leftarrow$ Lause 6.4



1) $g'(x) \leq g'(b) \quad \forall x \in [a,b]$

ja $g'(b) \leq g'(y) \quad \forall y \in [b,c]$

$$\Rightarrow 2) \quad \underbrace{\int_a^b g'(x)\,dx}_{g(b)-g(a)} \leq \underbrace{\int_a^b g'(b)\,dx}_{g'(b)(b-a)} \Rightarrow \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leq g'(b)$$

$$3) \quad \underbrace{\int_b^c g'(b)\,dy}_{g'(b)(c-b)} \leq \underbrace{\int_b^c g'(y)\,dy}_{g(c)-g(b)} \Rightarrow g'(b) \leq \frac{g(c)-g(b)}{c-b}$$

$$4) \quad 2)+3) \Rightarrow \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leq g'(b) \leq \frac{g(c)-g(b)}{c-b} \quad \forall a<b<c$$

$\overset{\text{Lause 6.4}}{\Rightarrow}$ g konveksi.

Jensenin ey.

Kysymys: Voidaanko joskus sanoa $\mathbb{E}g(X) \geq g(\mathbb{E}X)$?

$(\mathbb{E}g(X) \leq g(\mathbb{E}X)$?