<u>Määr.</u> $] \rightsquigarrow z = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad (\underset{\lambda}{\underset{\shortparallel}{p_1}} + p_2 = 1)$

$\Rightarrow \quad g(p_1 x + p_2 x_2) \leq p_1 g(x_1) + p_2 g(x_2)$

Jos X distr. $\quad \underset{P(X=x)}{\underset{\shortparallel}{f(x)}} = \begin{cases} p_1, & x = x_1 \\ p_2, & x = x_2 \\ 0 & \text{muul.} \end{cases}$

niin TTL $\Rightarrow \quad \mathbb{E} g(X) = p_1 g(x_1) + p_2 g(x_2)$

ja $\quad g(\mathbb{E}X) = g(p_1 x_1 + p_2 x_2)$

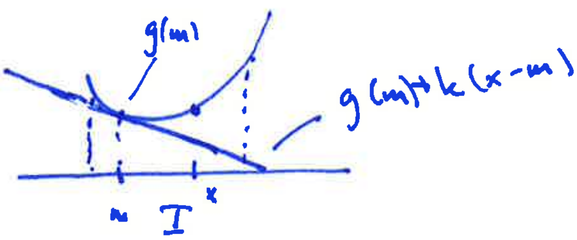
$\therefore$ kon. määritelmällä on tn-tulkinta

<u>Jensen</u> $\boxed{g(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E} g(X)}$ (kun $X = x_1 1\{X = x_1\} + x_2 1\{X = x_2\}$)

$\downarrow$ laaj. induktiolla tilanteeseen $\quad X = \sum_{i=1}^{n} x_i 1\{X = x_i\}$

<u>Lause 6.6</u> $I \subset \mathbb{R}$ väli, $g: I \to \mathbb{R}$ konveksi, $m \in I$ $\Rightarrow$ löytyy k s.e. $g(x) \geq g(m) + k(x-m) \quad \forall x \in I$

"<u>Kuva</u>"



Lause (Jensenin ey)

- I avoin väli
- $g : I \to \mathbb{R}$ konveksi
- X sm, $P(X \in I) = 1$
- $\mathbb{E}X$ olemassa
- $\mathbb{E}g(X)$ —"—

$\longrightarrow$ Tällöin

$$g(\mathbb{E}X) \le \mathbb{E}g(X)$$

Tod (uskomattoman helppo)

1) koska $I = (a,b)$, niin $a < X < b$ tn:llä 1 $\underline{(0)}$

2) 1) $\Rightarrow$ $\mathbb{E}X \in I$, sillä $a < X \Rightarrow a < \mathbb{E}X$ & $X < b \Rightarrow \& \ \mathbb{E}X < b$

oletus.

(voisi olla $a = -\infty$, $b = \infty$)

3) Lause 6.6, kun $\boxed{m = \mathbb{E}X} \overset{2)}{\in} I$

$\Rightarrow$ $\exists k$ s.e. $g(x) \geq g(m) + k(x - m) \quad \forall x \in I$

$\therefore \ \underset{\in I}{g(X)} \geq g(m) + k(X - m)$ tn:llä 1

4) siis $\mathbb{E}g(X)$ olem. joten

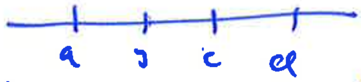
$$\boxed{\mathbb{E}g(X) \geq} \ \mathbb{E}\left(g(m) + k \cdot (X - m)\right)$$

$$\underset{\text{lin.}}{=} g(m) + k(\mathbb{E}X - m) \overset{3)}{=} \boxed{g(\mathbb{E}X)} + 0 \qquad \square$$

(in the last line, $m \overset{3)}{=} \mathbb{E}X$ is marked under both occurrences of m)

Lause 6.6 Tod

Ol g on JVASTI OGRZVA.

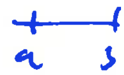


1) Lause 6.4 ⇒ $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \overset{\text{Lause 6.4}}{\le} \frac{g(c)-g(b)}{c-b} \overset{\text{Lause 6.4}}{\le} \frac{g(d)-g(c)}{d-c}$

⇒ $\underbrace{\lim_{b\to a} \frac{g(b)-g(a)}{b-a}}_{= g'(a)} \le \frac{g(d)-g(c)}{d-c}$

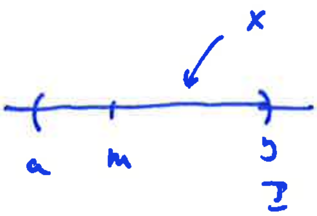
ol.

⇒ $g'(a) \le \lim_{d\to c} \frac{g(d)-g(c)}{d-c} = g'(c)$



∴ g' on kasvava ☺.

2)



Kun $x \ge m$ ($x < b$), niin $g(x)-g(m) = \int_m^x g'(u)\,du$

anal. perusl.

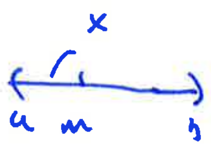
$\ge \int_m^x g'(m)\,du$

$= g'(m)\cdot(x-m)$

∴ $g(x) \ge g(m) + g'(m)\cdot\underbrace{(x-m)}_{\ge 0}$

(eli kunhan $k \le g'(m)$ väite)

3) Kun $x < m$, niin vast.



$g(m)-g(x) = \int_x^m g'(u)\,du \le g'(m)\int_x^m du$

$= g'(m)\cdot(m-x)$

⇔ $g(x) \ge g(m) + g'(m)\cdot\underbrace{(x-m)}_{<0}$

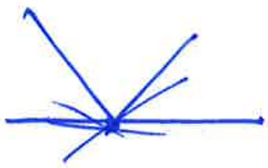
(eli kunhan $k \ge g'(m)$ väite)

4) 2)+3) ⇒ $g'(m) \le k \le g'(m)$ eli $k = g'(m)$ ainoa vaihtoehto.

Huom Jos $g(x)=|x|$ ~~niin~~ (ja $I=\mathbb{R}$)

ja $m=0$, niin

$$\underbrace{g(x)}_{=|x|} \geq \underbrace{g(m)}_{=g(0)=0} + k\cdot\underbrace{(x-m)}_{=x}$$



Onnistuu kunhan $k\in[-1,1]$

$\iff$ $|x| \geq 0 + k\cdot x$ $\iff$ $|x| \geq \begin{cases} k\cdot|x|, & x\geq 0 \\ -k\cdot|x|, & x<0 \end{cases}$

eli

jos $k\geq 0$, niin $|x|\geq k|x|$ $\quad x>0$

$\iff$ $k\leq 1$

$|x| \geq \underbrace{-k\cdot|x|}_{<0}$ voi.

jos $k<0$, niin $|x|\geq k|x|$ tot. voimassa

$|x|\geq -k|x|$

$\iff$ $k\geq -1$

∴ Lause 6.6:ssa k:ksi kelpaavat nämä luvut kun $-1\leq k\leq 1$.

Luku k nimitetään subderivaataksi

(TÄRKEÄ KONVEKSIN OPTIMOINNIN KÄSITE) (MOREAU-ROCKAFELLAR

TAKAISIN HÄNTIIN

- MARKOV
- TŠEBYŠEV
- ⋮
- MEF EY.

Ol $X \geq 0$.

Tällöin Markov $\Rightarrow$

(on olemassa !!)

$$\text{Jos } \mathbb{E}X \ \exists \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

$$\text{-"- } \mathbb{E}X^2 \text{ -"- } \mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(X^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}X^2}{a^2}$$

$$\text{-"- } \mathbb{E}X^3 \text{ -"- } \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X^3}{a^3}$$

$$\vdots$$

$$\text{Jos } \mathbb{E}X^n \ \exists \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X^n}{a^n}$$

Huom VALTAVAN SUURILLA a viimeinen arvio on tarkin (sillä $\frac{c_n}{a^n} \leq \frac{c_1}{a^n}$ kun a riitt. suuri oli $c_n, c_1 > 0$ mitä vain.

∴ "MITÄ SUUREMPIA MOMENTTEJA ON OLEMASSA, SEN "OHUEMMAT" HÄNNÄT

⟶ JOS KAIKKI MOMENTIT (VIELÄ OHUEMMAT)

↓

Jos MEF äärellinen jossain 0:n ympäristössä niin vieläkin ohuemmat

Lause 6.9

$\underline{X}$ sm

$M(t) = \mathbb{E}e^{Xt}$

1) $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \inf_{t>0} e^{-at} M(t)$

2) HT (...)

ESIM

$\underline{X}$ distr. $\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1/2, & x = 0 \\ 1/2, & x = 2 \end{cases}$

kun $t \neq 0$

$\Rightarrow M(t) = \mathbb{E}e^{Xt} = \frac{1}{2}e^{0t} + \frac{1}{2}e^{2t}$

$= \frac{1}{2}(1 + e^{2t})$

$\mathbb{P}(X \geq a) = \begin{cases} 1, & a = 0 \\ 1/2, & a \in (0,2] \\ 0, & a > 2 \end{cases}$

Nyt $g(t) \overset{\text{merk.}}{=} e^{-at}M(t) = e^{-at} \cdot \frac{1}{2}(1 + e^{2t})$

$= \frac{1}{2}e^{-at} + \frac{1}{2}e^{(2-a)t}$

$\overset{\text{myös}}{=} \frac{1}{2}e^{(2-a)t}(1 + e^{-2t})$

1) kun $a > 2$ (esim $a = 3$)

niin $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}e^{(2-a)t}\underbrace{(1 + e^{-2t})}_{\to 1}$

$\left(\text{esim } a=3 \; = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}e^{-t} \right) = 0$

TARKKA

$\therefore$ Lause 6.9 :n avulla

$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \inf_{t>0} g(t) \leq g(t)$ jok. $t > 0$

$\Rightarrow$ — " — $\leq \lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ $\therefore \mathbb{P}(X \geq a) = 0$ kun $a > 2$.

2) Kun $a = 2$, niin

vastaavasti $\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \underbrace{(1+e^{-2t})}_{\to 1}$

vast. $= \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \mathbb{P}(X \geq \overset{2}{a}) \leq \frac{1}{2}$.

Toisaalta $\quad g'(t) = \frac{1}{2}\cdot D(1+e^{-2t}) = -2\cdot\frac{1}{2}e^{-2t} < 0$

$\therefore \quad \inf_{t>0} g(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = 1/2$.

JA TARKKA TIETO

$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$ (eli tämälin on tarkka)

3) Kun $a < 2$, niin (esim $a = 1$)

$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\cdot e^{(2-a)t}\cdot \underbrace{(1+e^{-2t})}_{\to 1}$

$\left(\overset{\text{esim}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}e^{t}\right) = \infty$.

$\therefore$ Nyt tämä ei vielä kerro juurikaan mitään ($\mathbb{P}(X \geq a) \leq \infty$ on selviö)

Toisaalta $\quad g'(t) = \frac{1}{2}\underbrace{(2-a)}_{>0}e^{(2-a)t} - \frac{a}{2}e^{-at} \geq 0$

$(=) \quad e^{(2-a)t}\cdot\underbrace{(2-a)}_{>0} \geq a\cdot e^{-at}$

$(=) \quad \underbrace{\frac{e^{(2-a)t}}{e^{-at}}}_{= e^{(2-a)t+at} = e^{2t}} \geq \frac{a}{2-a} \quad (=) \quad e^{2t} \geq \frac{a}{2-a}$

$(=) \quad 2t \geq \ln\left(\frac{a}{2-a}\right)$

3.1) Kun $t \geq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a}{2-a}\right)$ funktio g on kasvava ja $t \leq$ –''–   –''– on väh.

∴ • Jos $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{a}{2-a}\right) \underset{\uparrow\,\text{merk.}}{=} t_* > 0$, niin

$$\inf_{t>0} g(t) = g(t_*)$$

• Jos $t_* \leq 0$, niin $\inf_{t>0} g(t) \overset{''}{=} g(0) = 1$

3.2) $t^* > 0 \iff \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a}{2-a}\right) > 0$

$\left(\text{ja } \underline{0 < a < 2}\right)$

$$\iff \ln\left(\frac{a}{2-a}\right) > 0$$

$$\iff \frac{a}{2-a} > 1$$

$$\iff a > 2-a$$

$$\iff 2a > 2 \iff a > 1.$$

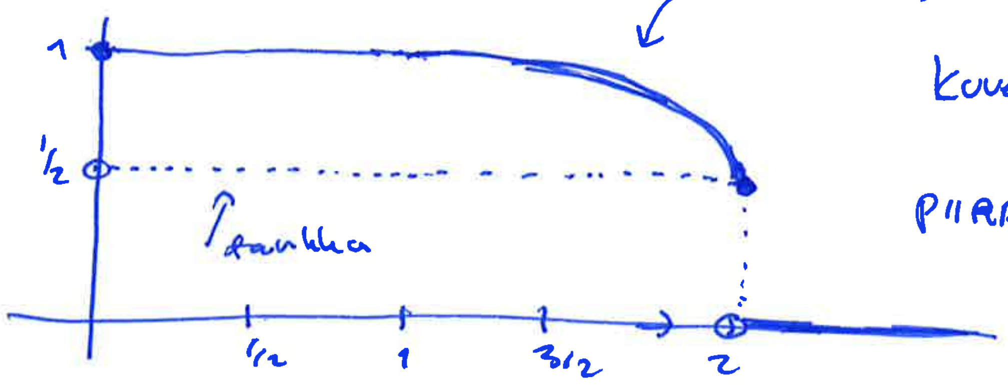
∴ • Kun $a \leq 1$, niin $\inf g(t) = 1$ eli paras mitä voidaan sanoa on $\mathbb{P}(X_n \geq a) \leq 1$ (Tarkka kun $a = 0$, muuten heittää')

Kun $1 < a < 2$, niin $g(t_*) = \frac{1}{2} e^{\frac{2-a}{2}\ln\left(\frac{a}{2-a}\right)} + \frac{1}{2} e^{-\frac{a}{2}\ln\left(\frac{a}{2-a}\right)}$

ja $\mathbb{P}(\underline{X} \geq a) \leq g(t_*)$.

Kuvaaja

MEF EY.. arvio



KUVAAJA LASK. R:llä PIIRRETTY KÄSIN :)