JAKAUMIA	PTNF / TF $f_X(x)$	$\mathbb{E}X$	$\operatorname{var} X$	$M(t)$
$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
$X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$	$\Leftrightarrow X \sim \mathrm{Bin}(1,p)$			
$X \sim \mathrm{Geom}(p)$	$p(1-p)^x, \; x=0,1,\ldots$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$p\cdot(1-(1-p)e^t)^{-1}, \; t<\ln(\frac{1}{1-p})$
$X \sim \mathrm{Poi}(\theta), \theta>0$	$e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}$, —"—	θ	θ	$\exp(\theta(e^t-1))$
$X \sim U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}\{a<x<b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}\{x>0\}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t), \; t<\lambda$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$	μ	σ^2	$\exp(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$

MARKOVIN EY: $X \geq 0, \; \mathbb{E}X<\infty \Rightarrow \mathbb{P}(X\geq a) \leq a^{-1}\mathbb{E}X, \; \forall a>0$

TŠEBYŠEVIN EY: $\mathbb{E}X=\mu, \; \operatorname{var} X=\sigma^2<\infty \Rightarrow \mathbb{P}(|X-\mu|\geq t) \leq t^{-2}\sigma^2 \; \forall t>0$

KONVEKSIT FUNKTIOT: , f' kasvava (jos kerran jvasti deriv.)
$f''\geq 0$ (—"— kahdesti —"—)

↳ TARKKA MÄÄR. $g(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$
$\forall \lambda\in[0,1], \; \forall x,y\in I$

JENSENIN EY: $g(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}g(X)$

jos · g konveksi, · $X\in I$ tn:llä 1, · $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}g(X)$ olemassa

HÖLDERIN EY, CAUCHYN-SCHWARZIN EY:

$\mathbb{E}|XY| \leq \|X\|_p\|Y\|_q$ ← kun $p=q=2$ $\Rightarrow |\operatorname{corr}(X,Y)| \leq 1$

kun $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\|X\|_p=(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$

$\operatorname{corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}X}\sqrt{\operatorname{var}Y}}$, $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y))$

SATUNN. VEKTORIT (sv) $\underset{\sim}{X}=(X_1,\ldots,X_n)$

$\underset{\sim}{X}$ diskreetti ($\mathbb{P}(\underset{\sim}{X}\in A)=\sum_{\underset{\sim}{x}\in A} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{x}=(x_1,\ldots,x_n)$

↓ JAKAUMAN MÄÄRÄÄ SV:N PTNF

$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})=\mathbb{P}(\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x}) = \mathbb{P}(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)$)

SV:N PTNF, YPTNF

$\underset{\sim}{X}$ jva (eli $(X_1,\ldots,X_n)$:llä jva yht. jakauma)

↓ JAK. MÄÄRÄÄ SV:N TF

$$\left(\mathbb{P}(\underset{\sim}{X}\in A)=\int_A f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})d\underset{\sim}{x} = \int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_A(\underset{\sim}{x})f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})d\underset{\sim}{x}\right.$$

$$\overset{\text{FUBINI}}{=} \left.\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_n\,\mathbb{1}_A(x_1,\ldots,x_n)f_{\underset{\sim}{X}}(x_1,\ldots,x_n)\right)$$

EHDOLLISET JAKAUMAT, KERTOLASKUSÄÄNTÖ, BAYESIN SÄÄNTÖ, MARGINALISOINTI

$\underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$, $\underline{Y}=(Y_1,\dots,Y_m)$

$$\boxed{f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})=f_{\underline{X}}(\underline{x})\,f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{y}|\underline{x})}$$

voimassa kun $(\underline{X},\underline{Y})$ jva
—||— disk
$\underline{X}$ disk, $\underline{Y}$ jva

$$f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{y}|\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})}{f_{\underline{X}}(\underline{x})}, & f_{\underline{X}}(\underline{x})>0\\ 0 & \text{muul.}\end{cases}$$

· f tiheys → voidaan sallia diskreetti osa ja osa jolla jva yht. jak

MARGINALISOINTI: $f_{\underline{X}}(\underline{x})=\int f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{y}$

↳ summataan disk. integroidaan jvan komponenttien yli

$$=\begin{cases}\sum_{\underline{y}} f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y}) & \text{kun } \underline{Y} \text{ disk.}\\ \int f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y}) & \text{kun } \underline{Y} \text{ jva}\\ \sum\int \dots & \text{kun } \underline{Y}\text{:llä sekä disk. että jva komp.}\end{cases}$$

- $\underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y} \Rightarrow H(\underline{X}) \perp\!\!\!\perp G(\underline{Y})$ | tiheys
- $\mathbb{E}\,G(\underline{Y})H(\underline{X}) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{E}\,G(\underline{Y})\,\mathbb{E}\,H(\underline{X})$
- $\mathbb{E}\,\underline{X}=(\mathbb{E}X_1,\dots,\mathbb{E}X_n)$
- $\mathbb{E}\,H(\underline{X})=(\mathbb{E}\,H_{ij}(\underline{X}))_{ij}$

(TTL) $$\mathbb{E}\,g(\underline{X},\underline{Y})=\begin{cases}\sum_{\underline{x},\underline{y}} g(\underline{x},\underline{y})f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y}) & (\underline{X},\underline{Y}) \text{ disk}\\ \iint g(\underline{x},\underline{y})f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\,d\underline{y} & (\underline{X},\underline{Y}) \text{ jva}\\ \sum\int \quad —||— \end{cases}$$

↑ yli disk.

- $\mathbb{E}(\underline{Z}^T)=(\mathbb{E}\underline{Z})^T$
- $\mathbb{E}(A\underline{Z}B+C)=A(\mathbb{E}\underline{Z})B+C$

EHD. ODOTUSARVO (VRT) EHDOLLA SV:N ARVO $\underline{X}=\underline{x}$.

kuin (TTL) yllä mutta ehd. tiheys vs

ehd. tiheys (voi olla disk.)

$$\mathbb{E}(g(\underline{X},\underline{Y})|\underline{X}=\underline{x})=\int g(\underline{x},\underline{y})\,f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{y}|\underline{x})\,d\underline{y}$$

$$\mathrm{var}(g(\underline{X},\underline{Y})|\underline{X}=\underline{x})=m(\underline{x})$$
$= v(\underline{x})$; määr. kuten varianssi $f_{\underline{Y}|\underline{X}}$:llä

EHD. ODOTUSARVO (VRT) EHD. SV $\underline{X}$: $\mathbb{E}(g(\underline{X},\underline{Y})|\underline{X})=m(\underline{X})$

$\mathrm{var}(g(\underline{X},\underline{Y})|\underline{X})=v(\underline{X})$; eli nimeä $\underline{X}$:ksi

OMINAISUUKSIA:
- $\mathbb{E}\,g(\underline{X},\underline{Y})=\mathbb{E}\,\mathbb{E}(g(\underline{X},\underline{Y})|\underline{X})$
- $\mathrm{var}\, g(\underline{X},\underline{Y})=\mathbb{E}\,\mathrm{var}(g(\underline{X},\underline{Y})|\underline{X})+\mathrm{var}\,\mathbb{E}(g(\underline{X},\underline{Y})|\underline{X})$

KOVARIANSSIMATRIISI:
- $\mathrm{Cov}(\underline{X})=\mathrm{cov}(\underline{X},\underline{X})$, $\mathrm{cov}(\underline{X},\underline{Y})=\mathbb{E}(\underline{X}-\mathbb{E}\underline{X})(\underline{Y}-\mathbb{E}\underline{Y})^T$
- $\mathrm{cov}(A\underline{X},B\underline{Y})=A\,\mathrm{cov}(\underline{X},\underline{Y})B^T$ ← cen-

$N_n(0,I_n)$: $\underline{U}\sim N_n(0,I_n) \Rightarrow$ TF $f_{\underline{U}}(\underline{u})=(2\pi)^{-n/2}\exp(-\tfrac{1}{2}\underline{u}^T\underline{u})$, $\mathbb{E}\underline{U}=0$, $\mathrm{Cov}\,\underline{U}=I_n$.

$N_n(\mu,\Sigma)$: $\underline{X}\overset{d}{=}A\underline{U}+\mu$. $\mathbb{E}\underline{X}=\mu$, $\mathrm{Cov}\,\underline{X}=AA^T=\Sigma$.

$M_{\underline{X}}(\underline{t})=\exp(\underline{t}^T\mu+\tfrac{1}{2}\underline{t}^T\Sigma\underline{t})$, jos Σ kään.: $f_{\underline{X}}(\underline{x})=(2\pi)^{-n/2}(\det\Sigma)^{-1/2}\exp(-\tfrac{1}{2}(\underline{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\underline{x}-\mu))$

TIHEYSFUNKT. MUUNTOKAAVA (MUISTISÄÄNTÖ)

$f_{\underline{X}}(\underline{x})|\partial\underline{x}|=f_{\underline{Y}}(\underline{y})|\partial\underline{y}|$, $\underline{y}=g(\underline{x})\Leftrightarrow\underline{x}=h(\underline{y})$,

$$\frac{\partial\underline{x}}{\partial\underline{y}}=J_h(\underline{y})=\det(D_jh_i(\underline{y})),\quad D_j=\partial/\partial y_j$$