HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Kurssikoe 28.10.2016 – Ratkaisuehdotuksia

1. Kuusisivuista noppaa heitetään, kunnes saadaan silmäluku 5 tai 6. Olkoon X niiden heittojen lukumäärä, joilla tuli 1, 2, 3 tai 4.

   (a) Ilmoita satunnaismuuttujan X jakauma sekä kerro sen odotusarvo.

   (b) Millä todennäköisyydellä $X = 3$ ehdolla, että ensimmäisellä heitolla saadaan 2 ?

   Ratkaisu:

   (a) Huomaamme, että satunnaismuuttuja saadaan toistokokeella, jossa lasketaan epäonnistumisten lukumäärää ennen ensimmäistä onnistumista, kun onnistumisella ymmärretään silmäluvun 5 tai 6 saaminen. Eli $X \sim \text{Geom}(p)$, missä p on onnistumistodennäköisyys. Tässä tapauksessa $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
   Luentojen perusteella tiedämme myös, että

   $$\mathbb{E}X = \frac{1-p}{p} = \frac{2/3}{1/3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$$

   (b) Tässä on useampia tapoja päätellä kysytty *ehdollinen* todennäköisyys. Eräs tapa on käyttää suoraan määritelmää. Olkoon A tapahtuma "*1. heitolla saadaan 2*" mikä voidaan ilmaista myös tapahtumana $\{Y_1 = 2\}$, kun Y_i on satunnaismuuttuja "*heitolla i. saatu silmäluku*" Tällöin kysytty ehdollinen todennäköisyys on

   $$\mathbb{P}(X = 3|A) = \frac{\mathbb{P}(X = 3, A)}{\mathbb{P}(A)}$$

   Nyt

   $$\{X = 3, A\} = \{Y_1 = 2, Y_2 \in \{1, 2, 3, 4\}, Y_3 \in \{1, 2, 3, 4\}, Y_4 \in \{5, 6\}\}$$

   joten käyttämällä riippumattomuutta

   $$\mathbb{P}(X = 3, A) = \mathbb{P}(Y_1 = 2)\mathbb{P}(Y_2 \in \{1, 2, 3, 4\})\mathbb{P}(Y_3 \in \{1, 2, 3, 4\})\mathbb{P}(Y_4 \in \{5, 6\})$$

   Koska $\mathbb{P}(Y_1 = 2) = \mathbb{P}(A)$, niin

   $$\mathbb{P}(X = 3|A) = \frac{\mathbb{P}(A)(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}}{\mathbb{P}(A)} = \frac{4}{3^3} = \frac{4}{27}$$

   Mutta, on muitakin tapoja, eli tämä on vain yksi ehdotus. Tärkeintä on, että jotenkin perustelee (vaikka toistokokeiden avulla) että itse asiassa

   $$\mathbb{P}(X = 3|A) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{4}{27}$$

2. Oletetaan, että $Y \sim U(0,1)$ ja määritellään $X = \sqrt{Y+1}$. Määrää satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F_X sekä satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f_X. Perustele lyhyesti, miksi X on jatkuvasti jakautunut. Laske lisäksi odotusarvo $\mathbb{E}X$.

Ratkaisu: Eräs tapa on käyttää kertymäfunktiotekniikkaa. Koska $Y \geq 0$ tn:llä 1, niin $X = \sqrt{Y+1} \geq \sqrt{0+1} = 1$ tn:llä 1. Vastaavasti $Y \leq 1$ tn:llä 1, joten $X = \sqrt{Y+1} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ tn:llä 1. Siispä voimme sanoa, että $F_X(x) = 0$, aina kun $x < 1$ ja $F_X(x) = 1$ aina kun $x \geq \sqrt{2}$. Voimme siis keskittyä selvittämään kertymäfunktion arvot, kun $x \in [1, \sqrt{2})$. Suoraan määritelmän avulla

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\sqrt{Y+1} \leq x) = \mathbb{P}(Y+1 \leq x^2) = \mathbb{P}(Y \leq x^2 - 1) = x^2 - 1$$

kun $1 \leq x < \sqrt{2}$. Olemme siis saaneet selvitettyä kertymäfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{kun } 1 \leq x < \sqrt{2} \\ 1, & \text{kun } x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

Havaitsemme myös, että F_X on jatkuvasti derivoituva kaikkialla paitsi mahdollisesti kohdissa $x = 1$ ja $x = \sqrt{2}$, ja tämä derivaattafunktio on

$$F_X'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } 1 < x < \sqrt{2} \\ 0, & \text{kun } x < 1 \text{ tai } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Tästä huomaamme, että F_X ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$ eikä kohdassa $x = \sqrt{2}$, mutta F_X on jatkuva näissä kohdissa.

Siispä luentojen nojalla F_X on jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan kertymäfunktio. Edelleen, koska tiheysfunktioksi voidaan valita kertymäfunktion derivaattafunktio niissä kohdissa missä derivaatta on olemassa, niin eräs satunnaismuuttujan X tiheysfunktiosta on

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } 1 < x < \sqrt{2} \\ 0, & \text{muutoin .} \end{cases}$$

Lopuksi voimme määrätä odotusarvon. Voimme laskea joko määritelmän avulla

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} 2x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}((\sqrt{2})^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

tai käyttää laskea $\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sqrt{Y+1}$ muunnoksen odotusarvona, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X = \mathbb{E}\sqrt{Y+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{y+1} f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{y+1}\mathrm{d}y = \int_1^2 y^{1/2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Toinen tapa olisi näyttää, että kuvaus $g\colon (0,1) \to B$, $g(y) = \sqrt{y+1}$ on diffeomorfismi. Aivan kuten yllä, havaitsemme, että kuvajoukko $B = g\big((0,1)\big) = (1, \sqrt{2})$, joten pyrimme näyttämään, että $g\colon (0,1) \to (1, \sqrt{2})$ on diffeomorfismi. Ensin selvitämme käänteisfunktion $h(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$ ratkaisemalla yhtälöä

$$g(y) = \sqrt{y+1} = x \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = h(x) = x^2 - 1$$

Havaitsemme siis, että g on bijektio $(0,1) \to (1, \sqrt{2})$ ja sen käänteisfunktion h on $h(x) = x^2 - 1$. Koska $h'(x) = 2x$, on se jatkuvasti derivoituva (jopa koko $\mathbb{R}$:ssä). Vastaavasti $g'(y) = \frac{1}{2}(y+1)^{-1/2}$ mikä on jatkuva ainakin välillä $(0,1)$, joten g on diffeomorfismi. Siispä satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma ja sen tiheysfunktio toteuttaa

$$f_X(x) = f_Y(h(x))|\, h'(x)\,| = \mathbf{1}\{\, h(x) \in (0,1)\,\}|\, 2x\,| = \begin{cases} 2x, & \text{kun } 1 < x < \sqrt{2} \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Nyt kertymäfunktio voidaan selvittää tästä integroimalla. Selvästi $F_X(x) = 0$, kun $x \leq 1$. Jos laskimme oikein, niin $F_X(x) = 1$ kun $x \geq \sqrt{2}$. Lasketaan vielä kertymäfunktion arvo, kun $1 < x < \sqrt{2}$. Luentojen mukaan

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\mathrm{d}u = \int_{1}^{x} 2u\mathrm{d}u = x^2 - 1$$

mikä saa arvon 0, kun $x = 1$ ja arvon 1, kun $x = \sqrt{2}$. Siispä

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } \ x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{kun } \ 1 \leq x < \sqrt{2} \\ 1, & \text{kun } \ x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

aivan kuten pitikin.

3. Satunnaismuuttuja X noudattaa tasajakaumaa välillä $(1,5)$. Satunnaismuuttuja $Y \sim N(2,3)$ on normaalijakautunut. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

   (a) Laske $\mathbb{E}(2X - 4Y + 7)$

   (b) Laske $\operatorname{var}(2X - Y)$

   (c) Laske $\operatorname{cov}(X + 3Y, 2XY)$

Ratkaisu: Koska $X \sim \mathrm{U}(1,5)$, niin tiedämme, että

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{2}(1+5) = \frac{6}{2} = 3$$

sekä

$$\operatorname{var} X = \frac{1}{12}(5-1)^2 = \frac{4^2}{3 \cdot 4} = \frac{4}{3}.$$

Edelleen, koska $Y \sim N(2,3)$, niin $\mathbb{E}Y = 2$ ja $\operatorname{var} Y = 3$.

(a) Tässä voimme käyttää odotusarvon lineaarisuutta, joka kertoo että

$$\mathbb{E}(2X - 4Y + 7) = 2\mathbb{E}X - 4\mathbb{E}Y + 7 = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 7 = 2 \cdot (3-4) + 7 = 7 - 2 = 5.$$

(b) Tässä voimme käyttää hyväksi satunnaismuuttujien $2X$ ja $-Y$ riippumattomuutta, joten

$$\operatorname{var}(2X - Y) = \operatorname{var}(2X) + \operatorname{var}(-Y) = 4 \operatorname{var} X + \operatorname{var} Y$$

missä käytimme hyväksi tietoa, että $\operatorname{var}(\alpha X) = \alpha^2 \operatorname{var} X$ kun α on vakio. Siispä

$$\operatorname{var}(2X - Y) = 4 \operatorname{var} X + \operatorname{var} Y = \frac{4 \cdot 4}{3} + 3 = \frac{16 + 9}{3} = \frac{25}{3}.$$

(c) Tämä on haasteellisempi tehtävä ja tarvitsemme kovarianssin määritelmää tai muotoilua

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.$$

Tähän pääsee myös määritelmästä, sillä

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y) = \mathbb{E}(XY - Y\mathbb{E}X - X\mathbb{E}Y + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.\end{aligned}$$

Bilineaarisuuden avulla saamme aluksi

$$\operatorname{cov}(X+3Y, 2XY) = 2\operatorname{cov}(X, XY) + 6\operatorname{cov}(Y, XY).$$

Nyt

$$\operatorname{cov}(X, XY) = \mathbb{E}(X^2Y) - \mathbb{E}X\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y - \mathbb{E}X\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

missä käytimme apuna muotoilua kovarianssille, satunnaismuuttujien X ja Y riippumattomuutta, sekä sitä, että $X^2 \perp\!\!\!\perp Y$, mikä seuraa siitä, että $X \perp\!\!\!\perp Y$ ja riippumattomuus säilyi muunnoksissa $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$. Siispä

$$\operatorname{cov}(X, XY) = \mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y - (\mathbb{E}X)^2\mathbb{E}Y = \mathbb{E}Y(\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}Y \operatorname{var} X.$$

Viimeisessä identiteetissä käytimme apuna varianssin esitystä toisen momentin ja odotusarvon avulla $\operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$. Havaitsemme, että vastaavasti

$$\operatorname{cov}(Y, XY) = \mathbb{E}Y^2\mathbb{E}X - (\mathbb{E}Y)^2\mathbb{E}X = \mathbb{E}X(\mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2) = \mathbb{E}X \operatorname{var} Y.$$

Yhdistetään nyt saamamme termit. Siispä:

$$\operatorname{cov}(X+3Y, 2XY) = 2\mathbb{E}Y \operatorname{var} X + 6\mathbb{E}X \operatorname{var} Y$$

Nyt voimme laskea lukuarvon:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X+3Y, 2XY) &= 2\mathbb{E}Y \operatorname{var} X + 6\mathbb{E}X \operatorname{var} Y\\ &= 2\cdot 2\cdot \frac{4}{3} + 6\cdot 3\cdot 3 = \frac{2^4}{3} + 2\cdot 3^3 = \frac{2\cdot(2^3+3^4)}{3}\\ &= \frac{2\cdot(8+81)}{3} = \frac{2\cdot 89}{3} = \frac{178}{3}\end{aligned}$$

4. (a) Satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio on

$$M(t) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}e^t + \tfrac{1}{2}e^{3t}$$

Määrää $\mathbb{E}X$ ja $\operatorname{var} X$.

(b) Olkoon $X \sim \text{Bernoulli}(\tfrac{2}{3})$ ja $Y \sim \text{Bernoulli}(\tfrac{1}{2})$ riippumattomia. Laske satunnaismuuttujan $X+3Y$ momenttiemäfunktio.

Ratkaisu:

(a) Tiedämme, että $\mathbb{E}X = M'(0)$ ja $\mathbb{E}X^2 = M''(0)$. Koska tiedämme edelleen, että $\operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$, niin haluamme määrätä luvut $M'(0)$ ja $M''(0)$. Derivoimalla saamme

$$M'(t) = \tfrac{1}{6}e^t + \tfrac{3}{2}e^{3t}$$

ja

$$M''(t) = \tfrac{1}{6}e^t + \tfrac{9}{2}e^{3t}$$

joten

$$\mathbb{E}X = M'(0) = \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{1 + 3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{10}{2 \cdot 3} = \frac{5}{3}$$

ja

$$\mathbb{E}X^2 = M''(0) = \frac{1}{6} + \frac{9}{2} = \frac{1 + 3 \cdot 9}{2 \cdot 3} = \frac{28}{2 \cdot 3} = \frac{14}{3}.$$

Vielä olisi laskettava $\operatorname{var} X$, mutta

$$\operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{14}{3} - \frac{25}{9} = \frac{42 - 25}{9} = \frac{17}{9}.$$

(b) Nyt tarvitsemme momenttiemäfunktion määritelmää ja tulon odotusarvon laskemista, kun satunnaismuuttujat ovat riippumattomia. Merkitään $Z = X + 3Y$. Tällöin kysytty momenttiemäfunktio on M_Z. Määritelmän avulla

$$M_Z(t) = \mathbb{E}e^{tZ} = \mathbb{E}e^{t(X+3Y)} = \mathbb{E}e^{tX+3tY} = \mathbb{E}(e^{tX}e^{3tY}).$$

Koska $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin $e^{tX} \perp\!\!\!\perp e^{3tY}$, joten

$$M_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tX}e^{3tY}) = \mathbb{E}e^{tX}\ \mathbb{E}e^{3tY} = M_X(t)M_Y(3t).$$

Nyt M_X ja M_Y voidaan laskea muunnoksen odotusarvon avulla. Lasketaan ensin M_X, joka on siis

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \tfrac{1}{3}e^{t\cdot 0} + \tfrac{2}{3}e^{t} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}e^{t}.$$

Seuraavaksi lasketaan M_Y, joka on vastaavasti

$$M_Y(t) = \mathbb{E}e^{tY} = \tfrac{1}{2}e^{t\cdot 0} + \tfrac{1}{2}e^{t} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t}.$$

Siispä

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(3t) = (\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}e^{t})(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{3t}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}e^{t} + \tfrac{1}{6}e^{3t} + \tfrac{1}{3}e^{4t}$$