Todennäköisyyslaskenta II, kertaustehtäviä (1 periodi)

Huom! Kertaustehtäviä ei tarvitse palauttaa, ne on tarkoitettu 1. periodin asioiden lisäharjoittelua varten. Vinkkejä voi kysellä Presemon kautta.

1. Olkoon X diskreetti sm jonka ptnf f on $f(-1) = 1/7$, $f(-2) = 1/7$, $f(0) = 1/7$, $f(1) = 3/7$, $f(2) = 1/7$ ja nolla muuten.

a) Olkoon Y sm $Y = X + 3$. Määrää sm:n Y ptnf.

b) Olkoon Z sm $Z = X^2 - 1$. Määrää sm:n Z ptnf.

2. Olkoon $\mathbb{P}(A) = 0.8$, $\mathbb{P}(B) = 0.3$ ja $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$. Laske seuraavien tapahtumien todennäköisyydet, a) B^c, b) $A \cup B$, c) $A^c \cap B^c$.

3. Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1, \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{48}x^4, & \text{kun } 1 \le x < 2, \\ 1, & \text{kun } x \ge 2. \end{cases}$$

a) Laske todennäköisyys $\mathbb{P}(X = 0)$.

b) Laske todennäköisyys $\mathbb{P}(\frac{1}{2} \le X < \frac{3}{2})$.

4. Kaksi korttia poimitaan 52:n kortin pakasta peräjälkeen (ilman takaisinpanoa). Millä tn:llä jälkimmäinen kortti on arvokkaampi kortti kuin ensimmäinen? (oletetaan, että ässä on arvokkain mutta maat ovat keskenään samanarvoisia)

5. (T2 2015 lähes) Olkoon $Y \sim U(1,2)$ ja määritellään $X = Y^3$.

a) Määrää sm:n X kertymäfunktio F_X?

b) Onko F_X jatkuvan jakauman kf? Jos on, niin määrää sm X tiheysfunktio f_X.

c) Laske $\mathbb{E}X$.

d) Laske $\operatorname{var} X$.

6. Mitkä seuraavista kertymäfunktioista F_1, F_2, F_3 ja F_4 ovat diskreetin jakauman kertymäfunktioita ja mitkä jatkuvan jakauman kertymäfunktioita? Laske diskreeteille jakaumille niiden pistetodennäköisyysfunktio ja jatkuville jakaumille niiden tiheysfunktio.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ 1/6 & \text{kun } 0 \le x < 1/4, \\ 1/2 & \text{kun } 1/4 \le x < 3/4, \\ 1 & \text{kun } x \ge 3/4, \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x/2 & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases} \qquad F_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x^3 & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1. \end{cases}$$

7. Olkoon X sm, jonka tiheysfuntio f on muotoa $f(x) = k \times (x-1)$, kun $x \in (1,9)$ ja nolla muutoin.

a) Määrää vakio k.

b) Määrää todennäköisyydet $\mathbb{P}(X > 5)$ ja $\mathbb{P}(X^2 - 4X + 1 > 0)$.

8. Millä tn:llä kahden lapsen perheessä

1. molemmat ovat tyttöjä, jos ainakin toinen lapsista on tyttö?
2. molemmat ovat poikia, jos vanhin lapsista on poika?

(ja teemme ”luonnolliset oletukset”todennäköisyyksistä).

9. Oletetaan, että laiteen hajoamisaika X (tunneissa) noudattaa exponenttijakaumaa $\text{Exp}(\lambda)$.

a) Oletetaan, että hajoamisajan odotusarvo $\mathbb{E}X$ on 100 tuntia. Millä todennäköisyydellä X ei ole hajonnut T tunnin aikana?

b) Millä T kohdan a) tn on tasan $\frac{1}{2}$?

10. Oletetaan että sm X ja Y yptnf on taulukon mukainen.

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=-1$	0	1/36	1/6	1/12
$X=0$	1/18	0	1/18	0
$X=1$	0	1/36	1/6	1/12
$X=2$	1/12	0	1/12	1/6

a) Määrää $\mathbb{P}(X \geq 1, Y \leq 0)$.

b) Mikä on tapahtuman $Y \leq 0$ tn, ehdolla että $X = 2$?

c) Ovatko X ja Y riippumattomia?

d) Mikä on sm:n $Z = XY$ jakauma (ptnf)?

11. Olkoon $\alpha > 0$. Määritellään jatkuva jakauma, jonka tf on $f(x) = k \cdot h(x)$, jossa h on

$$h(x) = e^{\alpha x}, \quad \text{kun } -1 < x < 3,$$

ja h on nolla muualla.

a) Laske vakion k arvo,

b) johda jakauman kertymäfunktio,

c) johda jakauman kvantiilifunktio.

12. Olkoon $X \sim N(0,1)$ normaalijakautunut sm. Olkoon Y ja Z sm, jotka määritellään kaavoilla

$$Y = X^5, \qquad Z = e^{3X}.$$

a) Tarkista että sekä Y:n että Z:n jakauma on jatkuva (tarkista lauseen 2.12 oletukset ja kerro lauseen joukot A ja B).

b) Laske lopuksi Y:n ja Z:n tiheysfunktiot.

13. Olkoon $X \sim U(0,1)$. Määrää käänteisfunktiomenetelmällä sellainen kuvaus $g\colon [0,1] \to [0,1]$, että sm:n $Y = g(X)$ tf f_Y on $f_Y(y) = 3y^2$, kun $0 < y < 1$ ja nolla muulloin.

14. Log-normaalijakauma parametreilla $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\sigma^2 > 0$ voidaan määritellä siten, että se on satunnaismuuttujan Y jakauma, kun

$$Y = \exp(\mu + \sigma X)$$

kun $X \sim N(0,1)$. Johda log-normaalijakauman tiheysfunktio.

15. Jatkoa tehtävään 14. Olkoon Y log-normaalijakautunut sm parametreillä μ ja $\sigma^2 > 0$. Laske

i) Laske $\mathbb{E}Y$

ii) Laske $\operatorname{var} Y$

16. Oletetaan, että $X \sim U(0,1)$. Laske odotusarvot (a) $\mathbb{E}X^3$ (b) $\mathbb{E}\sin(2\pi X)$ (c) $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$ (d) $\mathbb{E}e^{tX}$, kun $t \in \mathbb{R}$.

17. Erään satunnaismuuttujan X odotusarvo on 0, varianssi on 1 ja vinous on $S(X) = s$, kun $S(X) = \mu_3/\sigma^3$, kun μ_3 on kolmas keskusmomentti ja σ on keskihajonta. Laske seuraavien satunnaismuuttujien vinoudet: (a) $Y = X + b$; (b) $Z = aX$ (missä $a > 0$); $W = -X$.

18. Määritellään sm:n X ja Y yptnf kuten tehtävässä 10.

(a) Laske reunatodennäköisyydet $\mathbb{P}(X = x)$ kaikille $x = -1, 0, 1, 2$.

(b) Laske reunatodennäköisyydet $\mathbb{P}(Y = y)$ kaikille $y = -1, 0, 1, 2$.

19. Kuusisivuista noppaa heitetään, kunnes saadaan silmäluku 6. Olkoon X niiden heittojen lukumäärä, joilla tuli jokin muu silmäluku kuin 6.

(a) Määrää satunnaismuuttujan X ptnf sekä sen odotusarvo.

(b) Millä todennäköisyydellä $X = 5$ ehdolla, että sekä ensimmäisellä että toisella heitolla saadaan 2 ?

20. Oletetaan, että $X \sim \text{Geom}(1/10)$. Laske $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{P}(X > 5)$

21. (T2 2011) Olkoon satunnaismuuttujalla U välin $(0,1)$ tasajakauma, ja määritellään $X = -\ln(U)$. Johda lauseke X:n kertymäfunktion arvolle $F(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Johda X:n tiheysfunktio, ja ilmoita selvästi, missä joukossa tiheysfunktio on nolla. Tunnista X:n jakauma, ja kerro mikä on X:n odotusarvo.

22. Olkoon $X \sim U(0,1)$ ja $Y \sim U(0,1)$ riippumattomia sm:ia. Asetetaan $Z = X + Y$, $W = X - Y$. Määrää (a) $\text{cov}(X,Y)$, (b) $\text{cov}(X,Z)$, (c) $\text{cov}(Y,W)$, (d) $\text{cov}(Z,W)$ sekä $\text{cov}(Z, 2XY)$.

23. (T3 2015) Satunnaismuuttuja X noudattaa takajakaumaa välillä $(0,2)$. Satunnaismuuttuja Y on eksponenttijakautunut odotusarvolla 2. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

(a) Laske $\mathbb{E}(X - 3Y)$

(b) Laske $\text{var}(X + Y)$

(c) Laske $\text{cov}(X, X + XY)$

24. Olkoon X diskreetti sm, jonka ptnf on $f(0) = \frac{1}{3}$, $f(1) = \frac{1}{6}$ ja $f(3) = \frac{1}{2}$.

a) Määrää sm:n X momenttiemäfunktio $M(t)$. Millä $t \in \mathbb{R}$ momenttiemäfunktio on äärellinen?

b) Laske $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}X^2$ derivoimalla momenttiemäfunktiota.

c) Esitä momenttiemäfunktio potenssisarjana (opastus: käytä apuna eksponenttifunktion sarjaesitystä

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

d) Päättele potenssisarjan avulla, mikä on $\mathbb{E}X^{100}$.

e) Laske $\mathbb{E}X^{100}$ suoraan käyttämällä Lausetta 4.5.

25. (T4 vuosi 2015)

(a) Satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio on

$$M(t) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^t + \tfrac{1}{2}e^{2t}$$

Määrää $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}(X^2)$.

(b) Oletetaan, että $Z \sim \text{Gam}(3,2)$ ja $Y \sim \text{Gam}(5,2)$ sekä Z ja Y ovat riippumattomia. Määrää satunnaismuuttujan $Z + Y$ momenttiemäfunktio ja jakauma. Gammajakauman $\text{Gam}(\alpha, \lambda)$ momenttiemäfunktio on

$$M(t) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big)^{\alpha}, \quad (t < \lambda).$$