HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 12

Tehtäväsarja I

1. Oletetaan, että tietä pitkin havaintokohdan ohi mittauspäivinä i ajaa y_i autoa ja päivänä i havainnoidaan x_i tunnin ajan. Tässä tehtävässä käytämme mallia, jonka mukaan y_i:t ovat riippumattomien Poissonin jakaumia noudattavien satunnaismuuttujien Y_i havaittuja arvoja, joiden jakauma on $Y_i \sim \text{Poi}(\lambda x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Parametri λ kertoo jotain liikenteen intensiteetistä.

   a) Kirjoita uskottavuusfunktio $\lambda \mapsto f(\mathbf{y} \mid \lambda)$, missä $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

   b) sekä etsi parametrin suurimman uskottavuuden estimaatti λ^{ML}.

2. Käsittelemme nyt edellisen tehtävän Bayes-versiota. Parametri $\Lambda > 0$ on jatkuvasti jakautunut satunnaismuuttuja. Ehdolla Λ sm:t $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat ehdollisesti riippumattomia, ja $Y_i \mid (\Lambda = \lambda) \sim \text{Poi}(\lambda x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

   Parametrin Λ priorijakauma on $\text{Gam}(\alpha, \beta)$, jossa $\alpha, \beta > 0$ ovat vakioita. Johda posteriorijakauma $\Lambda \mid (\mathbf{Y} = \mathbf{y})$, jossa $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ on havaintoja vastaava satunnaisvektori ja $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, jossa luvut $y_i \geq 0$ ovat havaittuja lukumääriä.

3. Tietystä populaatiosta satunnaisesti valitun henkilön ikä A (vuosia), pituus L (cm) ja paino W (kg) mallinnetaan kolmiulotteisella normaalijakaumalla siten, että sv:lle $\mathbf{V} = (L, A, W)$

$$\mathbb{E}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 170 \\ 23 \\ 68 \end{pmatrix} \qquad \text{Cov}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} 49 & 0 & 63 \\ 0 & 81 & 42 \\ 63 & 42 & 121 \end{pmatrix}$$

   a) Mikä on pituuden L (reuna-)jakauma?

   b) Johda ehdollinen jakauma $W|(A = a, L = l)$. Mikä on 32 vuotta vanhojen ja 160 cm pitkien henkiöiden painojakauma?

   c) Ovatko henkilöiden ikä ja pituus riippumattomia?

4. Olkoon $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonaalivakiomatriisi. Tämä tarkoittaa, että Q on kääntyvä ja $Q^{-1} = Q^\top$. Määritellään $\mathbf{X} = 4Q\mathbf{U}$, missä $\mathbf{U} \sim N_n(0, I_n)$ on standardinormaalijakautunut satunnaisvektori. Oletetaan, että $n \geq 10$ ja muodostetaan satunnaisvektori $\mathbf{Y} = (X_1, \ldots, X_6)$.

   a) Mitä jakaumaa $\mathbf{X}$ noudattaa?

   b) Määrää satunnaismuuttujan $W = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}/16$ jakauma?

5. Hieman epäsymmetristä yksinkertaista jatkuvatilaista satunnaiskulun tilaa X_n ajan hetkellä $n = 1, 2, 3, \ldots, 10000$ kuvaa sen siirtymien summa

$$X_n = \mu n + \sum_{k=1}^{n} W_k$$

   missä $W_k \sim N_1(0, 1/1000)$ ja satunnaismuuttujat $W_1, W_2, \ldots, W_{10000}$ ovat riippumattomia.

a) Esitä satunnaismuuttujat $X_1, \dots, X_{10000}$ ja $W_1, \dots, W_{10000}$ satunnaisvektoreina $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{W}$ ja määrää sitten matriisi A sekä vektori λ jolla $\mathbf{X} = A\mathbf{W} + \lambda$. (Matriisihan on valtaisa, joten riittää hyvin, että käyttää $\dots$ merkintöjä tai sitten voi kertoa, mikä on A_{ij} kullakin rivillä i ja sarakkeella j. Sama pätee vektoriin λ).

b) Määritä satunnaisvektorin X jakauma.

6. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske sm:n X_{1005}:n ehdollinen tiheys, ehdolla, että $X_5 = a$. (opastus: voit käyttää Luentojen lausetta 10.6 tai voit etsiä satunnaismuuttujan V, jolle $X_{1005} = V + X_5$ ja jolle $X_5 \perp\!\!\!\perp V$, tällöin X_{1005}:n jakauma ehdolla $X_5 = a$ on sama kuin sm:n $V + a$ jakauma)