HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 11

Tehtäväsarja I

1. Olkoon X sm, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ sv ja olkoon sv $\mathbf{Z} = (Y_1, Y_2, X)$. Sv:n Z odotusarvovektori on

$$\mathbb{E}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ja sv:n $\mathbf{Z}$ kovarianssimatriisi $\mathrm{Cov}(\mathbf{Z})$ on jokin seuraavista matriiseista

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 20 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Mikä matriiseista on $\mathrm{Cov}(\mathbf{Z})$? Perustele.

2. Näytä laskemalla, että kahden satunnaisvektorin kovarianssi voidaan myös saada laskettua kaavalla

$$\mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top) - \mathbb{E}\mathbf{X}\mathbb{E}(\mathbf{Y}^\top)$$

3. Jatkoa tehtävään 1. Laske (tai lue suoraan): *a)* $\mathrm{var}(X)$, *b)* $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y})$, *c)* $\mathrm{cov}(X, \mathbf{Y})$, *d)* satunnaisvektorin (Y_2, X) kovarianssimatriisi sekä *e)* $\mathrm{var}(Y_2 - 2X + 5)$

4. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on yhteinen odotusarvo $\mathbb{E}X_j = \mu$ ja varianssi $\mathrm{var}\, X_j = \sigma^2$. Määritellään

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

ja

$$Z = \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2$$

Näytä laskemalla, että $\mathbb{E}Z = (n-1)\sigma^2$.

5. (Choleskyn hajotelma.) Olkoon $C = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ kaksiulotteisen satunnaisvektorin $\mathbf{Z} = (X, Y)$ kovarianssimatriisi. Etsi alakolmiomatriisi A, jolle $AA^\top = C$. (Opastus: Alakolmiomatriisi on muotoa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Kirjoitamalla matriisitulon auki saat neljä yhtälöä, joista 2 ovat samoja. Ratkaise näistä tuntemattomat a_{11}, a_{12} ja a_{22}. Tehtävän ajatus on se, että Choleskyn hajotelman avulla voidaan saadaan sellainen lineaarikuvaus, että jos $\mathbf{U}$ on standardinormaalijakautunut, niin $A\mathbf{U}$ on normaalijakautunut ja sen kovarianssimatriisi on C.

6. Tarkastellaan mittausmallia

$$Y = AX + Z$$

jossa sv $X \sim N(0, I_2)$ ja sv $Z \sim N(0, I_2)$ sekä $X \perp\!\!\!\perp Z$. Matriisi A puolestaan on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Laske ehdollinen momenttiemäfunktio

$$M_{Z|(X=x)}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\Big(\exp(\mathbf{t}^\top Z) \mid X = x \Big)$$

(Opaste: päättele ehdollisen odotusarvon määritelmän ja riippumattomuuden avulla että $M_{Z|(X=x)} = M_Z$ ja käytä luentojen tietoa normaalijakauman momenttiemäfunktiosta).

b) Laske ehdollinen momenttiemäfunktio

$$M_{Y|\ (X=x)}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\Big(\exp(\mathbf{t}^\top Y) \mid X = x \Big)$$

(Opaste: exponenttifunktio kuvaa yhteenlaskun kertolaskuksi. Tämän jälkeen jotain voi viedä ulos ehdollisesta odotusarvosta.)

c) Määrää ehdollinen tiheys $f_{Y|X}$. (Opaste: momenttiemäfunktio ja kohta b)

d) Määrää ehdollinen tiheys $f_{X|Y}$. (Opaste: kohta c) ja Bayesin kaava)