HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 10

Tehtäväsarja I

Tehtävät 1-6 käsittelevät lukua 8. Tehtävät 2 ja 3 ovat klassikoita

1. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia ja oletetaan, että $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on kahden muuttujan skalaariarvoinen kuvaus. Asetetaan $Z = g(X,Y)$ ja oletetaan, että $\mathbb{E}Z^2 < \infty$. Olkoon $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vapaasti valittu kuvaus ja merkitään $m(X) = \mathbb{E}(Z \mid X)$.

   a) Näytä laskemalla, että satunnaismuuttujat $Z - m(X)$ ja $m(X) - h(X)$ ovat korreloimattomia. Opastus: käytä odotusarvon laskemiseen lausetta 8.3. (eli odotusarvon laskemista iteroituna odotusarvona) sekä ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia

   b) sekä päättele edellisen kohdan ja binomikaavan avulla, että

   $$\mathbb{E}\Big(Z - h(X)\Big)^2 = \mathbb{E}\Big(Z - m(X)\Big)^2 + \mathbb{E}\Big(m(X) - h(X)\Big)^2$$

2. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia ja olkoon $Z = g(X,Y)$ on niiden muunnos. Oletetaan, että $\mathbb{E}Z^2 < \infty$. Olkoon $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vapaasti valittu kuvaus. Osoita luentomonisteen lause 8.2. eli näytä että

   $$\mathbb{E}(Z - m(X))^2 \le \mathbb{E}(Z - h(X))^2$$

   kun $m(x) = \mathbb{E}(g(X,Y) \mid X = x)$. Opastus: tehtävä 1.

3. Näytä luentomonisteen lause 8.4. eli osoita laskemalla (vaikka tapauksessa satunnaisvektorilla (X,Y) on jatkuva yhteisjakauma), että

   $$\operatorname{var}(g(X,Y)) = \mathbb{E}\operatorname{var}(g(X,Y) \mid X) + \operatorname{var}\Big(\mathbb{E}(g(X,Y) \mid X)\Big)$$

   Opastus: laske oikean puolen termit erikseen niin pitkälle kuin ne sievenevät käyttämällä määritelmiä, ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia sekä odotusarvon laskemista iteroituna odotusarvona.

4. Tarkastellaan hierarkkista mallia, jossa $X \sim U(0,3)$ ja $Y \mid (X = x) \sim U(x, x^2 + 2x)$.

   a) Laske yhteistiheysfunktio $f_{X,Y}$.

   b) Onko satunnaisvektorilla (X,Y) tasajakauma?

   c) Laske $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ ja $\operatorname{var}(Y \mid X = x)$ (vihje: nämä saa laskettua ilman integrointia ja yhteistiheysfunktiota)

Seuraavat tehtävää on työläs. Varsinkin kohdat c) ja d). Tarkoitus on korostaa ehdollistamisen etuja.

5. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske

   a) Laske $\mathbb{E}Y$ iteroidun odotusarvon kaavalla.

b) Laske $\operatorname{var} Y$ lauseen 8.4. (tai tehtävän 3) kaavalla

c) Laske $\mathbb{E}Y$ lauseen 7.7. avulla (tiedostamattoman tilastotieteilijän laki)

d) Laske $\operatorname{var} Y$ lauseen 7.7. avulla (tiedostamattoman tilastotieteilijän laki)

6. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x,y) = cy(2x+1)\,\mathbf{1}\{\,0 < y/2 < x < 1\,\}$$

a) Määrää vakio c.

b) Laske ehdollinen tiheys $f_{X|Y}$.

c) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(\,X \mid Y\,)$ eli määrää satunnaismuuttujan X paras ennuste (keskineliövirheen mielessä) satunnaismuuttujan Y funktiona

d) Laske satunnaismuuttujan X paras lineaarinen ennuste (keskineliövirheen mielessä) satunnaismuuttujan Y avulla. (Katso luentomonisteen luvun 7 kaava (7.3) sivulla 97).