HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 9

Tehtäväsarja I

Tehtävät 1-5 käsittelevät lukuja 7.6.–7.8.

1. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille

$$\mathbb{E}X_1 = 1, \quad \mathbb{E}X_2 = 2, \quad \operatorname{var} X_1 = 1, \quad \operatorname{var} X_2 = 4.$$

ja olkoon $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$. Määritellään

$$Y = \begin{pmatrix} 2016 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X$$

Laske $\mathbb{E}X$, $\operatorname{Cov}(X)$, $\mathbb{E}Y$ sekä $\operatorname{Cov}(Y)$. Vertaa tätä Harjoituksen 5 tehtävään 3.

2. Oletetaan, että käytettävissä on aineisto (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), jossa skalaari x_i on selittävän muuttujan arvo ja skalaari y_i on selitettävän muuttujan arvo mitattuna i:nnessä otosyksikössä. Tällöin muuttujan y arvoja usein selitetään muuttujan x arvon avulla muotoa $y = a + bx$ olevan *regressiosuoran* avulla, ts. regressiosuora antaa selittävän muuttujan arvoa x_i vastaavan ennusteen (tai sovitteen) $a + bx_i$. Regressiosuoran kertoimet lasketaan aineistosta kaavoilla

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

Tässä $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat otoskeskiarvot, eli $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ ja $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$. Luonnollisesti oletamme, että kertoimen b kaavan nimittäjä ei ole nolla.

Olkoot X ja Y diskreettejä satunnaismuuttujia siten, että $\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_i)) = \frac{1}{n}$ kullakin i (oletamme, että pisteet (x_i, y_i) ovat *erillisiä*). Tarkista, että tällöin saamme regressiosuoran yhtälön muodostamalla jakson 7.6 mukaisen parhaan lineaarisen ennusteen.

3. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joista kumpikin noudattaa tasajakaumaa $U(0, 1)$. Toisin sanoen vektorilla (X, Y) on tasajakauma yksikköneliössä. Määritellään nyt uusi satunnaisvektori (U, V) lineaarimuunnoksilla $U = 2X + 7Y$, $V = 7X + 2Y$.

   a) Kirjoita muunnos matriisikertolaskun muotoon, ts. muodosta sellainen neliömatriisi A, että $(U, V) = A(X, Y)$, missä (X, Y) ja (U, V) ymmärretään pystyvektoreiksi.

   b) Tutki mihin yksikköneliön pisteet (X, Y) kuvautuvat muunnoksessa. (Vihje: kuvajoukko on eräs suunnikas, ja voit aloittaa esim. tutkimalla mihin neliön kulmat kuvautuvat) Laske muunnoksen Jacobin determinantti ja päättele siitä vektorin (U, V) tiheysfunktio.

4. Jatkoa tehtävään 3. Laske satunnaisvektorin (U, V) odotusarvo ja kovarianssimatriisi. Voit käyttää joko kovarianssin bilineaarisuutta tai kovarianssin muunnoskaavaa (7.9) Laske vielä U:n ja V:n korrelaatiokerroin.

5. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, joiden yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{x^2}{8y^2} \mathbf{1}\{ 0 < x < 2,\ y > \tfrac{1}{4}x^2 \}$$

Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = \frac{X}{2}, \qquad V = 1 - \frac{X^2}{4Y}$$

a) Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio.

b) Ovatko U ja V riippumattomia?

Tehtävän 6 tarvittavat määritelmät löytyvät monisteen luvusta 8.1

6. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma yhteistiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x, y) = 15x^2y \times \mathbf{1}\{ 0 \le x < y \le 1 \}$$

a) Laske ehdollinen tiheys $x \mapsto f_{X|Y}(x|y)$, kun $0 < y < 1$.

b) Laske ehdollinen tiheys $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$, kun $0 < x < 1$.

c) Laske

$$m(x) = \int_x^1 y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y, \qquad \text{kun } 0 < x < 1.$$

(Arvo $m(x)$ on nyt ehdollisen jakauman odotusarvo eli ns. ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(Y|X = x)$. Tätä käsitellään luvussa 8.4.)