HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 8

Tehtäväsarja I

Tehtävät 1, 2 ja 3 käsittelevät lähinnä monisteen lukuja 7.1.-7.4.

1. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma yhteistiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x,y) = 3x^2 \times \mathbf{1}\{\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \,\}$$

   a) Laske $\mathbb{P}(Y < X/3)$
   b) Laske $\mathbb{P}(Y^3 < X < Y^2)$
   c) Laske $\mathbb{E}(X + Y)$.

2. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma yhteistiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x,y) = cx^2y \times \mathbf{1}\{\, 0 \le x < y \le 1 \,\}$$

   a) Määrää vakio c
   b) Määrää reunatiheysfunktio f_X
   c) Määrää reunatiheysfunktio f_Y

3. Tutki, ovatko satunnaismuuttujat X ja Y riippumattomia, kun niiden yhteistiheysfunktio on

   a) $f(x,y) = 4(x-1)y$, kun $1 < x < 2$ ja $0 < y < 1$ (ja nolla muuten)
   b) $f(x,y) = 8(x-2)(y-2)$, kun $2 < y < x < 3$ (ja nolla muuten)

Tehtävä 3 käsittelee monisteen lukua 7.7.

4. Jatkoa tehtävään 2. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma tehtävän 2 yhteistiheysfunktiolla. Laske satunnaisvektorin (X, Y) odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi.

Seuraavat tehtävät ovat klassikkoja.

5. Olkoon parilla (X, Y) tasajakauma ympyrässä, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, 0)$ ja jonka halkaisija on yksi. Laske satunnaismuuttujan X reunajakauman tiheysfunktio. Mikä luvussa 5 olleista jakaumista X:llä on?

6. Näytä että luentojen kaava (7.7)

$$\mathbb{E}(A\mathbf{Z}B + C) = A(\mathbb{E}\mathbf{Z})B + C$$

   on voimassa, kun $\mathbf{Z}$ on satunnaismatriisi ja A, B ja C ovat vakiomatriiseja, joiden dimensiot ovat sellaiset, että lauseke $A\mathbf{Z}B + C$ on määritelty. Opastus: Näytä, että kaikilla indekseillä (i, j) on voimassa

$$\Big(\mathbb{E}(A\mathbf{Z}B + C)\Big)_{ij} = \Big(A(\mathbb{E}\mathbf{Z})B + C\Big)_{ij}$$

   jossa alaindekseillä ij merkitään matriisiarvoisen lausekkeen kohdassa (i, j) olevaa alkiota. Tarviset siten matriisikertolaskun määritelmää, odotusarvon lineaarisuutta sekä satunnaismatriisin odotusarvon määritelmää tehtävään vastaamiseen.