HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 7

Tehtäväsarja I

Osa tämän viikon tehtävistä ovat varsin haastavia, joten ei kannata huolestua, jos niiden kanssa on tekemistä. Vinkkejä kannattaa kysyä lisää.

1. Ajatellaan, että meillä on 4000000 (neljä miljoonaa) kokonaislukua, joiden keskiarvo on 7 ja neliöiden keskiarvo on 50. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka ptnf määräytyy näiden lukujen avulla seuraavasti: jos luku k esiintyy n_k kertaa, niin $\mathbb{P}(X = k) = n_k/4000000$. Laske $\mathbb{E}X$ ja $\operatorname{var} X$ sekä laske Tšebyševin epäyhtälön avulla yläraja-arvio todennäköisyydelle $\mathbb{P}(X \geq 11)$. Kuinka paljon lukuja $4, 5, \ldots, 9$ ja 10 on vähintään?

2. Olkoon $X > 0$ sellainen satunnaismuuttuja, että odotusarvot $\mathbb{E}X^4$, $\mathbb{E}(1/X^4)$ ja $\mathbb{E}\ln(X)$ ovat kaikki reaalilukuja. Mitä voit sanoa Jensenin epäyhtälön avulla
   a) lukujen $1/\mathbb{E}X^4$ ja $\mathbb{E}(1/X^4)$ suuruusjärjestyksestä, ja
   b) lukujen $\ln(\mathbb{E}X)$ ja $\mathbb{E}\ln(X)$ suuruusjärjestyksestä?
   c) Laske edellä kerrotut neljä suuretta (tai niiden likiarvot), kun X:llä on välin $(1, 2)$ tasajakauma, ja tarkista tällä tavalla, että sait edellä järkeiltyä suuruusjärjestyksen oikein päin.

3. Näytä luentojen lauseesta 6.4. puolet, eli että jos g on konveksi välillä I, niin

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq \frac{g(c) - g(b)}{c - b}$$

   aina kun $a < b < c$ ovat välin I alkioita. Toimi seuraavasti: etsi sellainen $\lambda \in (0, 1)$, että $b = \lambda a + (1 - \lambda)c$. Sovella sitten konveksisuuden määritelmää kun $x = a$, $y = c$ ja kun λ on äsken saamasi λ. Järjestele termit (mahdollisesti lisäämällä ja vähentämällä termejä) kunnes saat yllä olevan epäyhtälön. Piirrä myös kuva ja selitä erotusosamäärät geometrisesti.

4. Päättele Minkowskin epäyhtälö tapauksessa $p = 4$ seuraavasti:
   a) päättele että $\mathbb{E}|X + Y|^4 \leq \mathbb{E}(|X + Y|^3 \times |X|) + \mathbb{E}(|X + Y|^3 \times |Y|)$, missä $\times$ tarkoittaa kertolaskua.
   b) päättele Minkowskin epäyhtälö tästä soveltamalla Hölderin epäyhtälöä oikean puolen termeihin ja lopuksi sieventämällä yhteiset tekijät samalle puolelle epäyhtälöä.

5. Osa Lauseen 6.9. todistuksesta. Oletetaan, että X:n momenttiemäfunktio on äärellinen $|t| < h$.
   a) Päättele Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön avulla, että

$$(\mathbb{E}Xe^{tX})^2 \leq \mathbb{E}(X^2e^{tX})\mathbb{E}e^{tX}$$

   kunhan $|t| < h$.

b) Oletetaan, että tiedämme, että momenttiemäfunktiota voi derivoida odotusarvon "sisällä" (kuten Luvun 4 kalvoissa sivulla 47), kunhan $|t| < h$. Päättele a)-kohdan ja momenttiemäfunktiota derivoimalla, että kumulanttiemäfunktion toinen derivaatta $K''(t) \geq 0$, kun $|t| < h$.

c) Selitä b)-kohdan avulla, miksi kumulanttiemäfunktio K on konveksi välillä $(-h, h)$.

6. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka momenttiemäfunktio on

$$M_X(t) = \frac{e^{8t} - 2e^{4t} + 1}{16t^2}, \text{ kun } t \neq 0$$

ja $M_X(0) = 1$. Merkitään $g(t) = e^{-ta} M(t)$.

(a) Laske $\lim_{t\to\infty} g(t)$ kun $a > 8$, $a = 8$ ja $a < 8$.

(b) Mitä pystyt Lauseen 6.9. avulla päättelemään satunnaismuuttujan häntätodennäköisyyksistä $\mathbb{P}(X \geq a)$ näistä raja-arvoista?