HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 6

Tehtäväsarja I

1. Laske numeeriset arvot seuraaville integraaleille:
$$\int_0^\infty x^6 e^{-3x} dx$$
ja
$$\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^5 dx.$$
Vihjeitä: Gammafunktio ja beetafunktio jaksosta 5.2. (Jälkimmäisen integraalin voisi laskea myös työläästi laskemalla $(1-x)^5$ auki ja integroimalla näin saatua funktiota.)

Seuraavan tehtävän jakaumat ja momenttiemäfunktiot löytyvät opetusmonisteen luvusta 5.1.

2. Kolikkoa heitetään toistuvasti, kunnes on saatu kaksi kruunaa. Olkoon X saatujen klaavojen määrä. Olkoon $Y_1, Y_2 \sim \text{Geom}(\frac{1}{2})$ riippumattomia sm ja olkoon $Z = Y_1 + Y_2$.
   a) Mitä jakaumaa X noudattaa?
   b) Laske satunnaismuuttujan Z momenttiemäfunktio (käytä riippumattomuutta ja geometrisen jakauman momenttiemäfunktion kaavaa (luvussa 5.1.3)).
   c) Päättele että Z ja X ovat samoin jakautuneita (vertaa esimerkiksi momenttiemäfunktioita, muitakin tapoja voit käyttää)

3. Jakauman huipukkuus (engl. excess kurtosis) on sen neljäs keskusmomentti jaettuna varianssin neliöllä, ts. μ_4/μ_2^2. (Keskusmomentti on määritelty monisteen luvussa 4.5.) Laske seuraavien jakaumien huipukkuudet:
   a) $N(0,1)$
   b) $U(-a,a)$ kun $a = \sqrt{3}$

4. Olkoon sm:lla X tasajakauma $\text{U}(-a,a)$. Laske jakauman momenttiemäfunktio ja kehitä se potenssisarjaksi (eksponenttifunktion Taylorin sarjan avulla). Päättele tuloksesta momentit $\mathbb{E}X^k$, kun $k = 2, 4, 6, 8$. (Tarkista lopuksi, että saat samat momentit suoraan integroimalla.)

5. Johda $\text{Geom}(p)$-jakauman kertymäfunktiolle geometrisen sarjan avulla yksinkertainen lauseke.

6. Olkoon X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, ja oletetaan, että $X, Y \sim \text{Poi}(1)$. Muodosta sarjaesitys todennäköisyydelle $p = \mathbb{P}(X = Y)$.
   a) Määrää alaraja todennäköisyydelle p laskemalla yhteen todennäköisyydet $\mathbb{P}(X = Y = k)$, kun $k = 0, 1, 2, 3$.
   b) Arvioi tapahtuman $\mathbb{P}(X = Y \text{ ja } X, Y \geq 4)$ todennäköisyyttä "unohtamalla" vaatimus, että $X = Y$ ja käyttämällä sitten hyväksi riippumattomuutta.
   c) Määrää yläraja todennäköisyydelle p laskemalla yhteen a) kohdan alaraja ja b) kohdan arvio "hännälle".