HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016
Harjoitus 5

Tehtäväsarja I

1. (Luvut $g(\mathbb{E}X)$ ja $\mathbb{E}g(X)$ ovat yleensä erisuuret.) Laske $g(\mathbb{E}X)$ ja $\mathbb{E}g(X)$, kun $g(x) = x^3 + 1$ ja

   a) X noudattaa diskreettiä tasajakaumaa joukossa $\{0, 1, 2, 3\}$,

   b) $X \sim \mathrm{U}(0, 2)$.

   Vihje: kummassakin tapauksessa $\mathbb{E}g(X)$ kannattaa laskea käyttämällä Lausetta 4.5. Myös Lausetta 4.3. kannattaa hyödyntää.

Seuraavat tehtävä selittänee, miksi riippumattomuuden käyttäminen helpottaa usein laskemista huomattavasti.

2. Olkoon $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Lasketaan odotusarvo $\mathbb{E}X^2$ kahdella tavalla (kohta *b*) on nyt helpompi tapa)

   a) Lasketaan odotusarvo Lauseen 4.5 avulla laskemalla summa

   $$\mathbb{E}X^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 f(x)$$

   samantapaisella tekniikalla, kuin mitä käytetään luentomonisteen esimerkissä 4.3. (Opastus: käytä apuna identiteettiä $x^2 = x(x-1) + x$. Identiteetin termiä x vastaava summa $\mathbb{E}X = \sum x f(x) = np$ on jo laskettu esimerkissä 4.3. Lopputuloksen pitäisi olla $np(1-p) + n^2p^2$.)

   b) *Käyttämällä riippumattomuutta apuna.* Tiedämme, että X on samoin jakautunut kuin $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, missä $Y_j \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ ja $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$. Määrää tämän, opetusmonisteen esimerkin 4.10 ja kaavan (4.6) avulla odotusarvo $\mathbb{E}X^2$.

Seuraavat kaksi tehtävää ovat monisteen luvun 4.6 asiaa, kaavat (4.6)-(4.10) sekä lauseet 4.3, 4.6, 4.7 ja 4.8 ovat hyödyllisiä. Hyviä lisäpuja on myös kalvojen sivuilla 37–45

3. Olkoot X ja Y sellaisia satunnaismuuttujia, joille

   $$\mathbb{E}X = 1, \quad \mathbb{E}Y = -2, \quad \mathbb{E}X^2 = 4, \quad \mathbb{E}Y^2 = 10, \quad \mathbb{E}(XY) = 2.$$

   Laske (a) $\operatorname{var} X$, (b) $\operatorname{var} Y$, (c) $\operatorname{cov}(X, Y)$, (d) $\operatorname{var}(3Y - 2X)$.

4. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille

   $$\mathbb{E}X_1 = 1, \quad \mathbb{E}X_2 = 2, \quad \operatorname{var} X_1 = 1, \quad \operatorname{var} X_2 = 4.$$

   Määritellään

   $$Y = 2016 - 7X_1 + 6X_2, \qquad Z = 4 + X_1 - 3X_2.$$

   Laske $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}Z$, $\operatorname{var} Y$, $\operatorname{var} Z$ ja $\operatorname{cov}(Y, Z)$.

5. Määritellään satunnaismuuttujan X *vinous* (engl. *skewness*) kaavalla

$$S(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

missä $\mu_3 = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^3\Big)$ on kolmas keskusmomentti ja σ on keskihajonta. Laske $S(X)$, kun X on jatkuva sm tiheysfunktiolla

a) $f(x) = x/2$, kun $0 < x < 2$, ja nolla muuten.

b) Millä arvoilla a ja b tasajakautuneella $X \sim \mathrm{U}(a, b)$ on sama odotusarvo ja varianssi kuin a-kohdan jakaumalla? Laske sen vinous.

(Opastus: laske odotusarvo ja sitten keskusmomentit Lauseella 4.5. Tasajakautuneen sm:n odotusarvo ja varianssi löytyy monisteesta vaikka kohdasta 5.3.2. Mieti b)-kohdan lopussa ensin, mikä on $\mathrm{U}(-1, 1)$-jakautuneen sm:n 3. momentti, tässä symmetria-argumentti helpottaa. Tällä ajatuksella ja lineaarisuudella varsinaisen vinouden laskeminen onnistuu yllättävän helposti.)

6. Laske kolme ensimmäistä momenttia $\mathbb{E}X^k$, $k = 1, 2, 3$, kun X noudattaa Poissonin jakaumaa $\mathrm{Poi}(2)$. (Opastus: Jakauman momenttiemäfunktio $M(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \exp(2(e^t - 1))$ löytyy monisteen jaksosta 5.1.5. Tätä derivoimalla eli Lauseen 4.9 avulla saat momentit helposti laskettua, kun taas Lauseen 4.5 käyttö johtaisi sarjoilla laskemiseen)